MAGMAS

1

---

2 Fixer un élément quelconque a et observer que l'application $k \longmapsto a^{2^k}$ n'est pas injective, elle finit par boucler. Que faire de cette boucle ?

GROUPES, SOUS-GROUPES

3

1) $\varphi(1_G)$ est neutre et tout élément x est inversible d'inverse $\varphi\big(\varphi^{-1}(x)^{-1}\big)$.

2) b) Appliquer le résultat de la question **1)** avec $\mathbb{R}$ pour groupe G et une bijection φ bien choisie.

---

4 Théorème de Lagrange !

5

3) b) Découper G en fonction de la valeur que l'application $g \longmapsto gxg^{-1}$ attribue à chaque élément.

c) G est la réunion disjointe de ses classes de conjugaison.

d) Si G n'est pas commutatif, se donner un élément x de $G \setminus \mathrm{Z}(G)$ et montrer que :

$$\left\{zx^k \mid \quad z \in \mathrm{Z}(G), \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

est un sous-groupe de G.

6

2) b) Si $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$, alors $e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathbb{U}_n$, donc...

4) Si $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$, alors $H \cup K$ n'est pas stable par produit.

7

1) b) Toute bijection est un changement d'indice potentiel.

2) Pour deux ensembles finis de mêmes cardinaux :

$$A \subset B \iff A = B.$$

3) b) Exploiter une certaine relation de Bézout.

---

8 Substituez, simplifiez, soyez joueurs !

---

9 Montrer que $\left|gB^{-1}\right| = |B|$, puis que $\left|A \cap gB^{-1}\right| > 0$.

MORPHISMES DE GROUPES

10

11

---

12 Découper G en fonction de la valeur que f attribue à chaque élément.

13

14

15

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{U}_{m \wedge n}$.

16

---

17 En notant s la somme, montrer que $\varphi(g)\,s = s\,\psi(g)$ pour tout $g \in G$.

GROUPES SYMÉTRIQUES

18

19

20

2) Exploiter la relation $\sigma(i\ j)\sigma^{-1} = \big(\sigma(i)\ \sigma(j)\big)$ avec des objets bien choisis.

4) b) Toute permutation dont le support ne contient pas 1 appartient à H, donc à M.

ANNEAUX, SOUS-ANNEAUX

21

22

23

24

25

26

27 Pour déterminer $\mathrm{U}\left(\mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right]\right)$, s'intéresser à des modules au carré.

28

29

30 **3)** Vive les sommes géométriques !

MORPHISMES D'ANNEAUX

31

32 **2)** Deux endomorphismes, à savoir $z \longmapsto z$ et $z \longmapsto \overline{z}$.

33 En tant que groupes, $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sont isomorphes à un même groupe produit.

34

35

ANNEAUX $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ET ARITHMÉTIQUE

36 **3)** Imiter soigneusement la résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.

37 **2) a)** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\quad p-k \equiv -k\ [p]$.

38 **1)** Relation de Bézout !

39 **2)** Imiter les preuves du même genre déjà vues et construire un entier de la forme n^2+1.

PARTIES GÉNÉRATRICES D'UN GROUPE

40

41 **3)** En exploitant **1)**, montrer qu'aucun sous-groupe $\left\langle \frac{n_1}{2^{k_1}}, \ldots, \frac{n_r}{2^{k_r}} \right\rangle$ ne peut jamais coïncider avec le groupe étudié tout entier.

42

43 **2) a)b)** Pour quels entiers n l'application $g \longmapsto g^n$ est-elle une bijection ?

44 **2) e)** Que vaut $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ au fait ?

f) Pour tout $f \in D_n$: $\quad f(1) \in \mathbb{U}_n$.

ORDRE D'UN ÉLÉMENT

45

46

47 **1)** Pour chacun des groupes, exhiber une propriété de ce groupe invariante par isomorphisme que les autres ne possèdent pas.

2) a) Nous connaissons tous les sous-groupes d'un groupe cyclique.

48

49 **2)** Si G ne contient que des éléments d'ordre 1 ou p, appliquer convenablement le résultat de la question **1)**.

---

50 **2)** $m \wedge n = mu + nv$ pour certains $u, v \in \mathbb{Z}$.

---

51 **1)** Faire des paquets $\{x, x^{-1}\}$.

2) **b)** Théorème de Lagrange !
