CONJUGUÉ, MODULE, INVERSE

1

2

3

2) S'intéresser d'abord à l'équation des modules.

4

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad |z|^2 = z\overline{z}$. Pour l'interprétation géométrique, dessiner deux vecteurs u et v au hasard et réfléchir.

2) Demi-somme/demi-différence.

---

5 Toute somme de deux réels au carré est un module au carré.

---

6 Montrer d'abord que $\text{Re}(z) + |z| > 0$, puis simplifier $\left(z+|z|\right)^2 - 2z\left(\text{Re}(z)+|z|\right)$.

7

2) Multiplier par le conjugué au numérateur et au dénominateur, puis développer le dénominateur grâce à la relation $|z|^2 = z\overline{z}$.

3) Pour tout $z \in \mathbb{U}$: $\quad \dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

4) Être réel, c'est être égal à son conjugué.

8

1) b) Commencer par faire apparaître un module au carré au dénominateur. Plus tard, reconnaître une équation de cercle de centre et de rayon à préciser.

2) a) Que dire de la partie imaginaire ? Commencer par faire apparaître un module au carré au dénominateur.

9

---

10 Être réel, c'est être égal à son conjugué.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

11

12

6) Et si $\cos^2 \varphi = 0$?

13

FORMES TRIGONOMÉTRIQUES

14

4) La technique de l'angle moitié produit des formes PRESQUE trigonométriques. Attention au signe du cosinus ou du sinus devant l'exponentielle.

---

15 Dans un premier temps, faire apparaître un module au carré au dénominateur.

16

---

17 Écrire z sous forme trigonométrique.

---

18 Écrire z sous forme trigonométrique et exploiter les formules de duplication.

EXPONENTIELLE COMPLEXE

19

20

2) Second degré.

21

22

1) TVI basique !

TRIGONOMÉTRIE

23

24

2) D'abord, bien choisir x dans le résultat de la question **1)**. Pour la suite, $\cos^2 \dfrac{\pi}{10}$ est-il plutôt proche de 0 ou plutôt proche de 1 ?

25

26 **2) a)** Calculer de deux façons $\mathrm{Im}\big((e^{ix}-1)(e^{iy}-1)\big)$.

27 Soit on raisonne par récurrence, soit on dé-linéarise si on veut obtenir une expression explicite de C_n et S_n, mais c'est plus technique.

28

29

30

31 Travailler avec une somme finie et l'écrire comme une partie imaginaire.

GÉOMÉTRIE

32

33 **3)** Noter par exemple ω et $-\omega$ les deux racines carrées de z, puis caractériser par équivalence le fait que le triangle de sommes z, ω et $-\omega$ est rectangle en z.

34

35 On connaît explicitement la forme $z \longmapsto \ldots$ des translations, des symétries centrales et des rotations, il suffit de composer et d'observer.

36 Pour montrer que l'image de telle figure par I est telle autre figure, attention de bien montrer une égalité — si possible par équivalence — et non pas une inclusion.

3) Le cercle de centre a passant par 0 a pour équation $|z-a|^2 = |a|^2$. Si on pose $z' = \frac{1}{z}$, que décrit z' lorsque z décrit ce cercle ?

Pour un cercle de centre a et de rayon r ne passant pas par 0, montrer une équivalence du genre :

$$|z-a| = r \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\frac{1}{z} - a'\right| = r'.$$

37 **1) b)** Que vaut $A\,e^{i\alpha} + \frac{1}{B\,e^{i\beta}}$?

2) a) Exploiter **1)b)** et **1)c)**.

d) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

38 Une piste parmi d'autres : $|a+b|^2 = 1$.

39 Commencer par le cas $n = 2$.

RACINES $n^{\text{èmes}}$

40 **3) b)** Racines $n^{\text{èmes}}$, puis angle moitié, mais attention de ne pas diviser par 0.

41

42 Nous connaissons quelques irrationnels.

43 **1)** Comment met-on un polynôme de degré 2 sous forme canonique ? Adapter.

44 **1)** Formule du binôme, puis somme géométrique.

2) Technique de l'angle moitié, puis somme géométrique.

45

46 **1)** $|S|^2 = S\overline{S}$.

SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2

47 **6)** Comment transforme-t-on un problème multiplicatif en un problème additif ?

48 Étudier la parité de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis en déterminer une expression explicite. Heureusement que $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ est compris entre -1 et 0 !

---

49 S'intéresser pour tout $x \geqslant 0$ à la suite $\left(f^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ termes}}$.
