MAXIMUM, BORNE SUPÉRIEURE

1 Si la partie étudiée est incluse dans $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, s'intéresser à son symétrique par rapport à 0.

2

3

4

3) Montrer que pour tout $a \in A$:
$$d(x,A) \leqslant |x-y| + |y-a|,$$
puis que $d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|$.

5

6

2) a) En posant $s = \sup\left\{n \in \mathbb{Z} \mid \quad n \leqslant x\right\}$, montrer que $s-1 < m$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$, puis que $m = s$.

---

7 Exploiter la caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure.

---

8 Calculer $\sup\left\{|x-y| \quad \mid \quad x,y \in A\right\}$ grâce à la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

9

10

POT POURRI

11

— Mise en facteur du terme dominant au numérateur et au dénominateur,

— quantité conjuguée $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$,

— encadrement/minoration/majoration.

12

13

14

15

---

16 Distinguer les cas $\ell = \ell'$ et $\ell \neq \ell'$.

17

---

18 Adapter une preuve de cours du paragraphe « Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration ».

19

20

21

---

22 Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

---

23 Montrer que l'ensemble $f^{-1}\big(\llbracket 0, \lfloor A \rfloor \rrbracket\big)$ est fini pour tout $A > 0$.

---

24 En notant ℓ la limite étudiée, montrer que l'ensemble $\left\{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, \lfloor A \rfloor \rrbracket \mid \quad \left|\dfrac{p}{q} - \ell\right| < 1\right\}$ est fini pour tout $A > 0$.

25

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante, elle prend une valeur strictement supérieure ou strictement inférieure à sa limite.

---

26 Étudier la monotonie des deux suites ainsi que leur position relative.

---

27 Étudier la monotonie des deux suites ainsi que leur position relative.

SUITES EXTRAITES

28

29

30 Raisonner par l'absurde et passer à la limite dans les formules de trigonométrie de la tangente.

31 Raisonner par l'absurde et passer à la limite dans les formules de trigonométrie du cosinus et du sinus.

32 Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, trouver une fonction d'extraction φ pour laquelle $\ln \varphi(n) \approx \theta + 2n\pi$ afin de garantir que $\cos\big(\ln \varphi(n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\theta$.

SUITES ADJACENTES

33

2) Pour montrer que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, encadrer grâce à la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) Pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, si $p \leqslant x < q$, alors $p \leqslant \lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1 \leqslant q$.

34

2) Raisonner par l'absurde et se ramener à des manipulations d'entiers. Il n'y a pas beaucoup d'entiers dans $]-1, 1[$!

35

2) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ en fonction de sommes du genre $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots$

SUITES RÉCURRENTES

36

3) Comment transforme-t-on un problème multiplicatif en un problème additif ?

37

38

39

2) Reconnaître un taux d'accroissement, puis appliquer le théorème de Cesàro à la suite $\big(e^{u_{n+1}} - e^{u_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

40 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

41

42

2) Représenter x_n sur un dessin, formuler une conjecture, puis exploiter la réciproque de la fonction $x \longmapsto x + \tan x$.

43

44

2) Représenter x_n sur un dessin, formuler une conjecture, puis étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ensuite, montrer que $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement.

45

2) Montrer que $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $x_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement.

46

CESÀRO ET SES ALENTOURS

47

2) Comment transforme-t-on les produits en sommes ?

48 Adapter la preuve du théorème de Cesàro.

49 Adapter la preuve du théorème de Cesàro.