Suites complexes

1

2) a) Étude de fonction sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou concavité, puis imparité.

b) Écrire $z_n - |z_n|$ en fonction d'un sinus.

3) En notant z_∞ la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\arg(z_n) = \arg(z_\infty) + \arg\left(\frac{z_n}{z_\infty}\right)$ pour n assez grand, avec une égalité et non pas une congruence modulo 2π.

---

2 Ce n'est pas obligatoire, mais on peut travailler avec des formes trigonométriques et chercher des relations de récurrence sur les modules et les arguments.

3

2) Pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$.

3) Écrire $u_n - u_p$ comme une somme.

4) Bolzano-Weierstrass !

Valeurs d'adhérence

4

5

2) c) La suite $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

6

1) Utiliser la définition epsilonesque des valeurs d'adhérence.

2) b) Appliquer **1)**.

---

7 Soient a et b deux valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $a < b$. Soit $x \in [a, b]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend une valeur proche de a à un moment, puis plus tard une valeur proche de b, et comme elle avance par petits sauts par hypothèse, il faut bien qu'elle passe au voisinage de x à un moment. Y a plus qu'à rédiger.

Ouverts, fermés, compacts

8

9

---

10 Procéder à des extractions successives.

11

12

1) a) On peut faire autrement, mais on peut observer que $A + b$ est ouvert pour tout $b \in B$.

b) Procéder à des extractions successives.

13

14

---

15 Soit A une partie ouverte et fermée de $\mathbb{K}$. Raisonner par l'absurde et se donner $x \in A$ et $y \in \mathbb{K} \setminus A$, puis s'intéresser au segment d'extrémités x et y. Ce chemin de x vers y commence dans A et finit dans B, mais où est-on quand on passe la frontière ?

16

17

1) c) Utiliser **b)** pour commencer.

d) Il suffit d'appliquer **a)** et **c)** convenablement. On peut aussi faire sans.

18

2) b) La question **a)** produit plein de gentils ouverts.

c) Ça ne suffit pas, mais on peut commencer par passer au complémentaire dans le résultat de la question **b)**.

19

1) Par contraposition.

3) Utiliser la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

20

1) b) Montrer d'abord que $\alpha \in G$ en raisonnant par l'absurde.

c) Montrer que tout intervalle ouvert non vide contient un élément de G.

21

1) c) Bolzano-Weierstrass !

3) b) Écrire $u_p - u_q$ comme une somme.
