

# ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET FRACTIONS RATIONNELLES

Trois niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : partie 1 questions 1) et 2) et partie 2 questions 1) à 3).
- Piste rouge : partie 1 questions 1) et 2) et partie 2 questions 1) à 7).
- Piste noire : tout le devoir. Le cas échéant, inutile de rédiger les réponses aux questions 1) et 2) de la partie 1.

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

## ■ 1 UN PROBLÈME DE DÉNOMBREMENT

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n$  le nombre de couples  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  pour lesquels  $2p + 3q = n$ .

On note ensuite  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} u_0 + u_1x + \dots + u_nx^n + o(x^n)$ .
- 2) a) Calculer la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  de  $\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)}$ .  
 b) Simplifier  $\text{Im}\left(\frac{1}{x-j}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et calculer un développement limité de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x-j}$  à tout ordre au voisinage de 0. Cela ne change rien que la fonction soit à valeurs complexes, pas de panique!  
 c) Déterminer trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  pour lesquels pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = \alpha n + \beta + (-1)^n \gamma + \delta \sin \frac{2(n+1)\pi}{3}$  et en déduire un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 3) Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$  premiers entre eux.
  - a) Montrer que l'équation  $ap + bq = n$  d'inconnue  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  possède une solution pour tout  $n$  assez grand.
  - b) Montrer par un raisonnement combinatoire plus direct que l'approche calculatoire des questions 1) et 2) que :

$$\left| \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid ap + bq = n\} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{ab} + O(1).$$

## ■ 2 FORMULE DES RÉSIDUS ET THÉORÈME DE ROUCHÉ

On s'intéresse dans ce problème à la *localisation des racines* d'un polynôme, c'est-à-dire à des résultats qui garantissent que les racines d'un polynôme donné sont situées dans telle ou telle région du plan complexe.

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul, on note :

- $D(z, r)$  (resp.  $\bar{D}(z, r)$ ) le disque ouvert (resp. fermé) de  $\mathbb{C}$  de centre  $z$  et de rayon  $r$ ,
- $m_p(z)$  la multiplicité de  $z$  dans  $P$ ,
- $\text{Res}(F, z)$  le *résidu de  $F$  en  $z$* , i.e. le coefficient de  $\frac{1}{X-z}$  dans la décomposition en éléments simples de  $F$  sur  $\mathbb{C}$ .

Avec ces notations,  $\frac{P'}{P} = \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ P(z)=0}} \frac{m_p(z)}{X-z}$  pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul. On fixe à présent  $r > 0$  une fois pour toutes.

- 1) Montrer que pour tous  $z \in \mathbb{C} \setminus r\mathbb{U}$  et  $k \geq 2$  :  $\int_0^{2\pi} \frac{r e^{it}}{(r e^{it} - z)^k} dt = 0$ .

- 2) a) Montrer que pour tous  $\lambda \in D(0, 1)$  et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  :  $\lambda^n \int_0^{2\pi} \frac{e^{\varepsilon int}}{1 - \lambda e^{\varepsilon it}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- b) En déduire que pour tout  $z \in D(0, r)$  :  $\int_0^{2\pi} \frac{r e^{it}}{r e^{it} - z} dt = 2\pi$ .
- c) Montrer de même que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r)$  :  $\int_0^{2\pi} \frac{r e^{it}}{r e^{it} - z} dt = 0$ .
- 3) Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$  sans pôle de module  $r$ . On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pôles de  $F$  de module strictement inférieur à  $r$ . Montrer la *formule des résidus* :
- $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r e^{it}) r e^{it} dt = \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{Res}(F, z).$$
- 4) Que vaut  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(r e^{it})}{P(r e^{it})} r e^{it} dt$  pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  sans racine de module  $r$  ?
- 5) Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas sur  $[0, 2\pi]$  et que sa partie réelle  $y$  est strictement positive. On pose ensuite  $x = \text{Re}(f)$ ,  $y = \text{Im}(f)$  et  $g = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \text{Arctan} \frac{y}{x}$ . Montrer que  $g$  est une primitive de  $\frac{f'}{f}$  sur  $[0, 2\pi]$ , puis calculer  $\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  sous l'hypothèse que  $f(0) = f(2\pi)$ .
- 6) Soient  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ . On suppose que  $|P - Q| < |Q|$  sur  $r\mathbb{U}$  et on pose  $F = \frac{P}{Q}$ .
- a) Montrer que  $P$  et  $Q$  n'ont pas de racine de module  $r$ , puis que  $\int_0^{2\pi} \frac{F'(r e^{it})}{F(r e^{it})} r e^{it} dt = 0$ .
- b) Exprimer  $\frac{F'}{F}$  en fonction de  $\frac{P'}{P}$  et  $\frac{Q'}{Q}$ , puis montrer que  $P$  et  $Q$  ont le même nombre de racines comptées avec multiplicité dans  $D(0, r)$  (*théorème de Rouché*).
- 7) On pose  $P = X^5 + 3X^3 + 1$ .
- a) Calculer  $P \wedge P'$  et en déduire que  $P$  est à racines simples.
- b) En exploitant certains monômes  $\lambda X^k$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que :
- toute racine de  $P$  appartient à  $D(0, 2)$ ,
  - $P$  possède exactement 3 racines distinctes dans  $D(0, 1)$ .
- 8) Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant et  $O$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit en outre  $\omega \in O$  fixé.
- a) Montrer l'existence d'un réel  $r > 0$  pour lequel  $D(\omega, r) \subset O$  d'une part, et pour lequel la borne inférieure  $R = \inf \{|P(\omega + z) - P(\omega)| \mid z \in r\mathbb{U}\}$  est strictement positive d'autre part.
- b) Montrer que pour tout  $z \in D(P(\omega), R)$ ,  $P - z$  possède une racine dans  $D(\omega, r)$ .
- c) En déduire que  $P(O)$  est ouvert dans  $\mathbb{C}$ . Le résultat est ici démontré dans le cas d'un polynôme, mais il est vrai dans un cadre plus vaste et s'appelle alors le *théorème de l'application ouverte*.