Commutant d'une matrice carrée

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **5)**.

— Piste rouge : questions **1)** à **7)**.

— Piste noire : tout le devoir.

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ est un corps. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note :

— $\mathscr{C}(A)$ le *commutant de A*, i.e. l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à A,

— $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des *polynômes en A*, i.e. des matrices $P(A)$, P décrivant $\mathbb{K}[X]$,

— $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

— $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On s'intéresse à la dimension de $\mathscr{C}(A)$ pour différentes matrices A et on compare aussi les ensembles $\mathscr{C}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ et $\mathscr{C}(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Qui contient qui ?

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

b) Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré 2. Est-il vrai que $\mathscr{C}(A) = \mathbb{K}[A]$?

3) Soient $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ distincts. On pose $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

a) Calculer la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

b) Montrer que la famille $\left(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}\right)$ est libre. Est-il vrai que $\mathscr{C}(D) = \mathbb{K}[D]$?

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que $\dim \mathscr{C}(A) = 3$.

a) Montrer que $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{21}\right) \neq \{0\}$ par un argument de dimension, puis que $c = 0$.

On montre de même que $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}\left(E_{12}, E_{22}\right) \neq \{0\}$.

b) Dénicher une contradiction.

5) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice n, i.e. pour laquelle $A^n = 0$ mais $A^{n-1} \neq 0$.

a) Justifier l'existence d'un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ pour lequel $A^{n-1}X \neq 0$.

b) Montrer que la famille $\left(X, AX, A^2X, \ldots, A^{n-1}X\right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

c) Soit $M \in \mathscr{C}(A)$. D'après **b)**, $MX = a_0X + a_1AX + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}X$ pour certains $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Montrer que $M = a_0I_n + a_1A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}$. Conclusion ?

6) Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{I}'(T) = \left\{MT - TM \mid \quad M \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension inférieure à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

On peut ainsi se donner une base $\left(M_iT - TM_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de $\mathscr{I}'(T)$ avec $M_1, \ldots, M_r \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$. On pose $\mathscr{I}(T) = \mathrm{Vect}(M_1, \ldots, M_r)$.

b) Calculer la dimension de $\mathscr{I}(T)$ et montrer que $\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \left(\mathscr{C}(T) \cap \mathscr{T}_n(\mathbb{K})\right) \oplus \mathscr{I}(T)$.

c) En déduire que $\dim \mathscr{C}(T) \geqslant n$.

7) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale par blocs de la forme $D = \begin{pmatrix} d_1I_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_rI_{p_r} \end{pmatrix}$ pour certains $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{K}$ distincts. En particulier, $n = p_1 + \ldots + p_r$.

Montrer que $\dim \mathscr{C}(D) = p_1^2 + \ldots + p_r^2$.

À partir de maintenant, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

8) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que A possède un polynôme annulateur non constant dans $\mathbb{C}[X]$.

b) En déduire l'existence d'un nombre complexe λ_1 pour lequel la matrice $A - \lambda_1 I_n$ n'est pas inversible, puis l'existence d'un vecteur non nul $X_1 \in \mathbb{C}^n$ pour lequel $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

c) Justifier l'existence d'une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dont X_1 est la première colonne, puis montrer que la première colonne de $Q^{-1}AQ$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

9) a) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *trigonalisable sur* $\mathbb{C}$, i.e. que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad P^{-1}AP \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C}).$$

b) En déduire que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $\quad \dim \mathscr{C}(A) \geqslant n$.