Équations de Sturm-Liouville

Deux niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : questions **1)** à **5)**.
- Piste rouge : tout le devoir.

On appelle *équation de Sturm-Liouville* toute équation différentielle linéaire $y'' + qy = 0$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ dans laquelle I est un intervalle non vide et $q \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. On notera $\mathscr{E}_q(I)$ l'ensemble des solutions d'une telle équation.

Si la fonction q est constante strictement positive, l'équation $y''+qy = 0$ est celle d'un oscillateur harmonique et ses solutions sont périodiques. La situation n'est pas aussi nette dans le cas général, mais les solutions d'une équation de Sturm-Liouville ont malgré tout souvent tendance à osciller et ce devoir s'intéresse spécifiquement à la distribution de leurs zéros.

Le théorème suivant servira plusieurs fois dans ce devoir, mais on l'admet. Une version plus générale du théorème de Cauchy-Lipschitz sera énoncée en deuxième année.

Théorème (Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz) Soient I est un intervalle non vide et $q \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule fonction $y \in \mathscr{E}_q(I)$ pour laquelle $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.

Dans les questions qui suivent, I est un intervalle non vide et a et b sont deux réels pour lesquels $a < b$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble des fonctions qui sont à la fois concaves et positives sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $q \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ positive non identiquement nulle et $y \in \mathscr{E}_q(I)$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

2) Soient $q \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ minorée par un certain $m > 0$ et $y \in \mathscr{E}_q(\mathbb{R}_+)$ non identiquement nulle. On note φ la fonction $y + iy'$ à valeurs complexes.

a) Montrer que φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

On peut ainsi noter λ la fonction à valeurs complexes $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda(x)}$ est constante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire l'existence d'une fonction strictement positive $r \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et d'une fonction $\theta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour lesquelles $y = r\cos\theta$ et $y' = r\sin\theta$.

c) Montrer que $q\cos^2\theta + \sin^2\theta = -\theta'$.

d) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad m\cos^2 t + \sin^2 t \geqslant \min\{1, m\}$.

e) En déduire la limite de θ en $+\infty$, puis que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

3) Soient $q \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et $y \in \mathscr{E}_q(I)$ non identiquement nulle.

a) Soit $a \in I$ un zéro de y. Montrer que $y'(a) \neq 0$, puis que y ne s'annule qu'en a au voisinage de a.

b) En déduire que tout segment inclus dans I ne contient qu'un nombre fini de zéros de y.

Les éventuels zéros d'une solution non identiquement nulle de $\mathscr{E}_q(I)$ sont ainsi toujours isolés les uns des autres et en nombre fini dans tout segment. On peut a fortiori les ranger dans l'ordre croissant et parler de zéros consécutifs, i.e. de zéros entre lesquels ne se trouve aucun autre zéro.

La fin du devoir est essentiellement consacrée au *théorème de comparaison de Sturm*, prouvé à la question **4)** et exploité dans les suivantes.

4) Soient $q_1, q_2 \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ deux fonctions pour lesquelles $q_2 \leqslant q_1$, ainsi que $y_1 \in \mathscr{E}_{q_1}([a,b])$ et $y_2 \in \mathscr{E}_{q_2}([a,b])$ non identiquement nulles. On suppose que a et b sont deux zéros consécutifs de y_2, mais par l'absurde, que y_1 ne s'annule pas sur $[a, b[$.

a) Montrer que la fonction $y_1y_2' - y_1'y_2$ est monotone sur $[a,b]$.

b) Étudier le signe de $y_2'(a)$ et $y_2'(b)$, puis dénicher une contradiction.

La fonction y_1 s'annule ainsi sur $[a, b[$ et on montre de même qu'elle s'annule sur $]a, b]$. En résumé, l'inégalité $q_2 \leqslant q_1$ implique que y_1 s'annule toujours entre deux zéros consécutifs de y_2 (*théorème de comparaison de Sturm*).

5) Soient $q \in \mathscr{C}(I)$ et $y \in \mathscr{E}_q(I)$.

a) Soient $a \in I$ et $m > 0$. On suppose que q est minorée par m et que $a + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}} \in I$. De quelle équation de Sturm-Liouville la fonction $x \longmapsto \sin\big((x-a)\sqrt{m}\big)$ est-elle solution ? En déduire que y s'annule à la fois sur $\left[a, a + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}\right[$ et $\left]a, a + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}\right]$.

On a ainsi redémontré le résultat de la question **2)e)** grâce au théorème de comparaison de Sturm.

b) Montrer de même que si a et b sont deux zéros consécutifs de y, alors q est non identiquement nulle et :

$$b - a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\|q\|_\infty}}.$$

Cette minoration lie l'écart entre deux zéros consécutifs de y à la taille q.

6) Soit $y \in \mathscr{E}_{\exp}(\mathbb{R}_+)$ non identiquement nulle, où $\exp = \big(x \longmapsto \mathrm{e}^x\big)$. D'après **2)e)**, y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc noter $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses zéros distincts rangés dans l'ordre croissant d'après **3)**.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \pi\,\mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi\,\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$, $\quad$ mais aussi que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) En déduire que $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\,\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$, puis déterminer un équivalent de $\mathrm{e}^{\frac{a_{n+1}}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) En utilisant le théorème de Cesàro, en déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$.

7) Soit $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ une fonction non identiquement nulle pour laquelle $f(a) = f(b) = 0$.

a) Justifier l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ pour lequel $\big|f(c)\big| = \|f\|_\infty$, puis montrer que :

$$\int_a^b \big|f''(x)\big|\,\mathrm{d}x \geqslant \|f\|_\infty \left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}\right).$$

b) En déduire que $\displaystyle\int_a^b \big|f''(x)\big|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4\,\|f\|_\infty}{b-a}$. Après coup, l'inégalité est vraie aussi si f est la fonction nulle.

8) Soient $q \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $y \in \mathscr{E}_q\big([a,b]\big)$ non identiquement nulle. On suppose que a et b sont deux zéros consécutifs de y.

a) Montrer l'*inégalité de Lyapounov* : $\quad \displaystyle\int_a^b \big|q(x)\big|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$.

Cette inégalité confirme que l'écart entre deux zéros consécutifs est lié à la taille de q.

On pose finalement $q^+(x) = \max\big\{0, q(x)\big\}$ pour tout $x \in [a,b]$.

b) Justifier l'existence d'un réel $c \in]a,b]$ et d'une fonction $z \in \mathscr{E}_{q^+}\big([a,b]\big)$ pour lesquels $z(a) = z(c) = 0$.

c) En déduire l'*inégalité de Wintner*, qui améliore un peu celle de Lyapounov : $\quad \displaystyle\int_a^b q^+(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$.