# Euler, le sinus et la fonction $\zeta$

Ce devoir est facultatif et plutôt délicat. Si vous vous y frottez, vous pouvez vous contenter de traiter les parties **1** et **2**, vous aurez déjà prouvé un joli résultat. Ce sera cela dit encore plus magnifique si vous allez jusqu'au bout !

## 1 Une curieuse factorisation du sinus

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Déterminer un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n$ pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\sin\big((2n+1)x\big) = P_n(\sin^2 x)\sin x.$$

**b)** Calculer le coefficient constant de $P_n$ et montrer que $P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$, puis en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Dans la partie **2**, on s'efforce de faire tendre $n$ vers $+\infty$ dans cette identité. Ce n'est pas gagné car $n$ y est présent partout !

## 2 Version discrète du théorème de convergence dominée

**2)** Soit $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes. On fait deux hypothèses :

— la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe $u_{\infty,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

— il existe une suite sommable de réels positifs $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $|u_{n,k}| \leqslant m_k$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$.

**a)** Montrer que $(u_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable pour tout $n \in \mathbb{N}$, de même que $(u_{\infty,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

**b)** Montrer que pour tous $n, N \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k} - \sum_{k=0}^{+\infty}u_{\infty,k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N}|u_{n,k} - u_{\infty,k}| + 2\sum_{k=N+1}^{+\infty}m_k$.

**c)** En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty}u_{\infty,k}$, ce qu'on peut également écrire ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}u_{n,k}$.
Ce résultat est la forme discrète, pour des sommes, d'un très général *théorème de convergence dominée*.

**3)** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$ en appliquant la version discrète du théorème de convergence dominée. Pas besoin de logarithme complexe !

**4)** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite sommable complexe. On pose $\pi_0 = 0$ et $\displaystyle\pi_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Montrer que $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en exploitant une inégalité de convexité, puis que $\pi_{n+1} - \pi_n \underset{n\to+\infty}{=} O\big(|u_{n+1}|\big)$.

**b)** En déduire que $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$ et : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\pi_{k+1} - \pi_k)$.

**5)** Soit $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de nombres complexes. On fait deux hypothèses :

— la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre complexe $u_{\infty,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

— il existe une suite sommable de réels positifs $(m_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour laquelle $|u_{n,k}| \leqslant m_k$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\pi_{n,0} = 0$ et $\displaystyle\pi_{n,k} = \prod_{i=1}^{k}(1+u_{n,i})$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la version discrète du théorème de convergence dominée à la famille $(\pi_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_{n,k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_{\infty,k})$.

**6)** Montrer que $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\displaystyle\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ (*développement eulérien du sinus*).

## 3 Introduction aux séries entières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *série entière associée à* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On suppose dans toute cette partie qu'il existe un réel $R>0$ pour lequel la série $\sum u_n x^n$ converge pour tout $x\in\,]-R,R[$. On peut ainsi poser $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour tout $x\in\,]-R,R[$.

**7)** Montrer que les séries $\sum u_n x^n$ et $\sum n\,u_n x^n$ convergent absolument pour tout $x\in\,]-R,R[$.

**8) a)** Soit $a\in\,]-R,R[$. On se donne un réel $r>0$ pour lequel $]a-r,a+r[\,\subset\,]-R,R[$.
Montrer que pour tout $x\in\,]a-r,a+r[\smallsetminus\{a\}$ : $\displaystyle\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\sum_{n=1}^{+\infty} n\,u_n a^{n-1}\right|\leqslant\frac{|x-a|}{r^2}\sum_{n=2}^{+\infty}|u_n|\,\big(|a|+r\big)^n$, puis que $f$ est dérivable en $a$.

**b)** En déduire sans trop détailler que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que $u_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Le résultat de la question **b)** montre en particulier que les coefficients d'une série entière sont uniques au sens suivant. Pour toute suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour tout $x\in\,]-R,R[$, alors $u_n=v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il est ici crucial que $R$ soit strictement positif.

## 4 Relation de récurrence entre $\zeta(2),\zeta(4),\zeta(6)\ldots$

On pose $\operatorname{cotan} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$, puis $\varphi(x)=1-x\operatorname{cotan} x$. On admet que pour tout $t\in\,]-1,1[$ :

$$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,t^n.$$

**9) a)** Montrer que pour tout $x\in\,]-\pi,\pi[\smallsetminus\{0\}$ : $\displaystyle\ln\frac{\sin x}{x}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}\,n}\,x^{2n}$, puis que $\displaystyle\varphi(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}\,x^{2n}$.

**b)** Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$ : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\varphi(x)\big)=x^2+\varphi(x)^2$, puis en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\qquad\text{et}\qquad\zeta(2n)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\,\zeta(2n-2k).$$

**c)** En déduire que $\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ est un rationnel pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Le résultat de la question **9)b)** est plus ou moins l'œuvre du mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), mais Euler l'a obtenu sous une forme un peu différente en lien avec une famille célèbre de nombres appelés les *nombres de Bernoulli*.

Si les réels $\zeta(2n)$, $n$ décrivant $\mathbb{N}^*$, sont bien connus, les réels $\zeta(2n+1)$, $n$ décrivant $\mathbb{N}$, ne le sont pour ainsi dire pas du tout. Le mathématicien français Roger Apéry a montré en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel. Quoi d'autre ? On sait que $\operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}}\big(\zeta(2n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de dimension infinie. On sait aussi que l'un des réels $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$ est irrationnel. C'est à peu près tout !