$\dfrac{\pi^2}{6}$ ET LE DILOGARITHME

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **6)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

1 EN ROUTE POUR $\dfrac{\pi^2}{6}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t \quad$ (*intégrales de Wallis*) $\quad$ et $\quad b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$.

1) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n > 0 \quad$ et $\quad a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$.

2) a) Montrer que $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$ pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)$.

b) En déduire que $\dfrac{b_n}{a_{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{2n+2} = (2n+2) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$.

b) En déduire une expression de a_{2n+2} en fonction de b_n et b_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que :

$$\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} = \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

c) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2 LE DILOGARITHME

4) Montrer que la fonction ℓ définie par $\ell(0) = 1$ et $\ell(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ pour tout $t \in \left]-\infty, 1\right[\smallsetminus \{0\}$ est continue sur $\left]-\infty, 1\right[$.

On appelle alors *fonction dilogarithme* la fonction Li_2 définie pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$ par la relation $\mathrm{Li}_2(x) = \displaystyle\int_0^x \ell(t) \, \mathrm{d}t$.

5) a) Montrer que Li_2 est dérivable sur $\left]-\infty, 1\right[$ et étudier sa monotonie.

Cette monotonie prouve que Li_2 possède une limite en 1, éventuellement infinie. Le théorème sous-jacent, admis pour le moment, s'appelle le *théorème de la limite monotone*.

b) Montrer que $-\ln(1-t) \leqslant \dfrac{t}{1-t}$ pour tout $t \in [0, 1[$, puis que $\ell(t) \leqslant 1 - \ln(1-t)$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant 2x + (1-x)\ln(1-x), \quad$ puis que la limite de Li_2 en 1 est finie.

6) a) Montrer sans récurrence que pour tous $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{u^n}{1-u} \, \mathrm{d}u$.

b) En déduire que pour tous $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant -\ln(1-t) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}$, $\quad$ puis que pour tous $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant \mathrm{Li}_2(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = \mathrm{Li}_2(x)$, $\quad$ mais aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x)$.

d) Montrer que $\mathrm{Li}_2(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.

7) Montrer que pour tout $x \in \left]0, 1\right[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x), \quad$ puis en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2}$.

8) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$: $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\ln t}{t} \, \mathrm{d}t \leqslant 1, \quad$ puis en déduire que $\mathrm{Li}_2(-x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\dfrac{(\ln x)^2}{2}$.