POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue-rouge : questions **1)** à **5)**.

— Piste noire : tout le devoir.

Le très important *théorème de Weierstrass*, du nom du mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815-1897) qui l'a démontré en 1885, énonce que toute fonction continue sur un segment y est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. On connaît de nombreuses preuves intéressantes de ce théorème, et ce devoir en explore une de 1912, que l'on doit au mathématicien soviétique Sergueï Natanovitch Bernstein (1880-1968).

On identifie dans ce problème tout polynôme à la fonction polynomiale associée sur $[0,1]$ et on pose $P_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$.

Pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note ensuite $B_n(f)$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}$, appelé le $n^{ème}$ *polynôme de Bernstein de* f.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, P_{n,k}$. Un calcul analogue montre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P_{n,k} = n(n-1)X^2$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(X - \frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k} = \frac{X(1-X)}{n}$, puis que pour tout $x \in [0,1]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| P_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2) Soient $K \geqslant 0$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction *K-lipschitzienne*, i.e. pour laquelle $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y|$ pour tous $x, y \in [0,1]$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$: $\displaystyle\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}$.

En particulier, la suite $\big(B_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$, ce qui prouve le théorème de Weierstrass sur $[0,1]$ dans le cas lipschitzien.

3) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée. Pour tout $h \geqslant 0$, on pose :

$$\omega_f(h) = \sup\Big\{|f(x) - f(y)| \quad | \quad x, y \in [0,1], \quad |x-y| \leqslant h\Big\}.$$

La fonction ω_f est appelée le *module de continuité de* f.

a) Justifier la bonne définition de ω_f et montrer que ω_f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\omega_f(0)$?

b) Soit $K \geqslant 0$. Montrer que f est K-lipschitzienne sur $[0,1]$ si et seulement si pour tout $h \geqslant 0$: $\omega_f(h) \leqslant Kh$.

c) Montrer que si $\omega_f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, alors f est continue sur $[0,1]$.

d) On suppose f continue sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $h \geqslant 0$, il existe deux réels $x, y \in [0,1]$ pour lesquels $|x-y| \leqslant h$ et $|f(x) - f(y)| = \omega_f(h)$, puis en déduire que $\omega_f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

En résumé, f est continue sur $[0,1]$ si et seulement si $\omega_f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

4) Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{C}\big)$.

a) Montrer que pour tous $h \geqslant 0$, $x \in [0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $x + ph \in [0,1]$: $|f(x+ph) - f(x)| \leqslant p\,\omega_f(h)$.

b) En déduire, en distinguant les cas $|x-y| \leqslant h$ et $|x-y| > h$, que pour tous $h > 0$ et $x, y \in [0,1]$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(h)\left(1 + \frac{(x-y)^2}{h^2}\right).$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{5}{4}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

En particulier, la suite $\big(B_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ d'après **3)d)**, ce qui achève de prouver le théorème de Weierstrass sur $[0,1]$ en toute généralité.

5) Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{C}\big)$. En guise d'application du théorème de Weierstrass, montrer que si $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

Les polynômes de Bernstein font mieux que fournir des approximations uniformes de fonctions continues, ils préservent remarquablement bien les propriétés des fonctions qu'ils approchent. Les questions qui suivent illustrent le phénomène. Certains théorèmes du chapitre « Dérivabilité et convexité » y sont requis.

6) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad B_n(f)' = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) P_{n-1,k}$.

b) En déduire que si f est croissante (resp. décroissante) sur $[0,1]$, $B_n(f)$ l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Une preuve du même genre montre, après calcul de $B_n(f)''$, que si f est convexe (resp. concave) sur $[0,1]$, $B_n(f)$ l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{C})$.

a) Montrer que pour tous $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f'\left(\frac{k}{n-1}\right) \right| \leqslant \frac{1}{n} \omega_{f'}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad \|B_n(f)' - B_{n-1}(f')\|_\infty \leqslant \omega_{f'}\left(\frac{1}{n}\right)$, puis que la suite $(B_n(f)')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

Il n'est pas vrai en général, comme on le montre en **c)**, que si une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ converge uniformément vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$, alors $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g'.

c) On pose $g_n(x) = x^n(1-x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Calculer $g_n'(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$, mais que $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g' sur $[0,1]$.