Racines carrées d'un endomorphisme

Deux niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : questions **1)**, **2)**, **4)**, **5)** et **6)**.
- Piste rouge : parties **1** et **2**.
- Piste rouge-noire : tout le devoir.

Dans ce devoir, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, mais on travaillera spécifiquement sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans certaines questions.

Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle *racine carrée de* f tout endomorphisme $r \in \mathscr{L}(E)$ pour lequel $f = r^2$. On pose $\mathscr{R}(f) = \left\{ r \in \mathscr{L}(E) \mid \ r^2 = f \right\}$. On rappelle que l'ensemble des polynômes en f est noté $\mathbb{R}[f]$.

On s'intéresse dans ce devoir à quelques conditions nécessaires/ suffisantes d'existence de racine carrée d'un endomorphisme, essentiellement en dimension finie. Les parties **1**, **2** et **3** sont indépendantes.

1 Premiers exemples

1) **a)** Proposer un exemple de racine carrée de l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1)$ de $\mathbb{C}[X]$.

b) Proposer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ un exemple de racine carrée de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2) **a)** En étudiant ses noyaux itérés, montrer que l'endomorphisme $P \longmapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine carrée.

b) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p. Montrer que si $\mathscr{R}(f) \neq \varnothing$, alors $p \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

a) Montrer que $\mathscr{R}(\mathrm{Id}_E)$ est infini si $n \geqslant 2$.

On suppose que $-\mathrm{Id}_E$ possède une racine carrée r.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F et $r(F)$ sont en somme directe, mais que $E \neq F + r(F)$. On peut ainsi se donner un vecteur a de $E \setminus \big(F + r(F)\big)$ et poser $G = F + \mathrm{Vect}(a)$. Montrer que G et $r(G)$ sont en somme directe.

c) En déduire que n est pair.

2 À propos de certains polynômes annulateurs ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda, \mu \geqslant 0$ distincts. On suppose que le polynôme $(X-\lambda)(X-\mu)$ annule f, mais qu'aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à 2 ne l'annule.

D'après le lemme de décomposition des noyaux : $\quad E = \mathrm{Ker}\big(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(f - \mu\,\mathrm{Id}_E\big)$.

On pose $p = \dfrac{f - \mu\,\mathrm{Id}_E}{\lambda - \mu}$ et $q = \dfrac{f - \lambda\,\mathrm{Id}_E}{\mu - \lambda}$.

4) **a)** Montrer que $E = \mathrm{Ker}\big(p - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(q - \mathrm{Id}_E\big)$ avec $\dim \mathrm{Ker}\big(p - \mathrm{Id}_E\big) \geqslant 1$ et $\dim \mathrm{Ker}\big(q - \mathrm{Id}_E\big) \geqslant 1$ et simplifier $p+q$, $\lambda p + \mu q$, p^2, q^2, pq et qp.

b) Montrer que la famille (p, q) est une base de $\mathbb{R}[f]$.

c) Montrer que $\mathscr{R}(f) \cap \mathbb{R}[f]$ est un ensemble fini et préciser son cardinal.

On se donne maintenant une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}\big(p-\mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(q-\mathrm{Id}_E\big)$.

5) Dans cette question, $n=2$. On veut montrer que $\mathscr{R}(f) \subset \mathbb{R}[f]$. Soit $r \in \mathscr{R}(f)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\big(p-\mathrm{Id}_E\big)$ est une droite vectorielle stable par r, puis que $r(e_1)=\alpha_1 e_1$ pour un certain $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

On montre de même que $r(e_2)=\alpha_2 e_2$ pour un certain $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $r \in \mathbb{R}[f]$.

6) Dans cette question, $n \geqslant 3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par tout polynôme en f, puis que $\mathscr{R}(f) \not\subset \mathbb{R}[f]$.

On généralise à présent la situation précédente. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_s \geqslant 0$ distincts avec $s \in \mathbb{N}^*$. On suppose que le polynôme $(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_s)$ annule f, mais qu'aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à s ne l'annule.

On note $L_1,\dots,L_s$ les polynômes de Lagrange de $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ et on pose $p_i = L_i(f)$ pour tout $i \in [\![1,s]\!]$.

7) **a)** Montrer que $f^k = \lambda_1^k p_1 + \dots + \lambda_s^k p_s$ pour tout $k \in [\![0,s-1]\!]$, puis simplifier $p_i p_j$ pour tous $i,j \in [\![1,s]\!]$.

b) Montrer que $\mathscr{R}(f) \cap \mathbb{R}[f]$ est un ensemble fini et préciser son cardinal.

3 Cas des automorphismes ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

8) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $E_1,\dots,E_s$ des sous-espaces vectoriels de E stables par f. On suppose que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ et que $f|_{E_i}$ possède une racine carrée pour tout $i \in [\![1,s]\!]$. Montrer que f en possède une également.

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(a_0,\dots,a_{n-1})$ l'unique famille de réels pour laquelle $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \mathrm{o}\big(x^{n-1}\big)$, puis on pose $R = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$.

a) Montrer que X^n divise $R^2 - X - 1$.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

b) Montrer que si $f-\mathrm{Id}_E$ est nilpotent, alors $R\big(f-\mathrm{Id}_E\big) \in \mathscr{R}(f)$.

c) En déduire que si $f-\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est nilpotent pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $\mathscr{R}(f) \neq \varnothing$.

10) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E)$. Comme on l'a vu en TD, f possède un polynôme annulateur non nul.

Montrer que f possède un polynôme annulateur non nul dont 0 n'est pas racine, puis déduire des résultats précédents que $\mathscr{R}(f) \neq \varnothing$.