Séries de Fourier

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : parties **1** et **2**.

— Piste rouge : tout le devoir.

On note $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Je vous laisse deviner seuls le sens des notations $\mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1 En route pour les coefficients de Fourier

1) a) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

b) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On pose $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer que si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $\quad c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$.

À présent, soit $f\in\mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, le nombre complexe $\widehat{f}(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ est appelé le $n^{\text{ème}}$ *coefficient de Fourier de* f. On pose ensuite $S_n(f)(x)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. La suite de fonctions $\big(S_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *série de Fourier de* f.

Au départ, rien ne garantit que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, ni bien sûr qu'elle converge vers f, et encore moins que la convergence est uniforme ! D'ailleurs, ce n'est pas vrai en général.

2) On note f_1 la fonction 2π-périodique définie par la relation $f_1(x)=\pi-x$ pour tout $x\in[0,2\pi[$. Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $\quad S_n(f_1)(x)=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(kx)}{k}$.

On montre de même, en notant f_2 la fonction 2π-périodique définie par la relation $f_2(x)=|x|$ pour tout $x\in[-\pi,\pi[$, que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $\quad S_{2n+1}(f_2)(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\cos\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)^2}$.

3) a) Montrer que pour tous $a,b\in\mathbb{R}$ pour lesquels $a\leqslant b$ et pour toute fonction en escalier $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que pour toute fonction $f\in\mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$: $\quad \widehat{f}(n)\underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).

2 Le théorème de Dirichlet

4) On pose $D_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

a) Exprimer $D_n(x)$ comme un quotient de sinus pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5) Soient $f\in\mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x\in\mathbb{R}$ fixé. On suppose f dérivable en x.

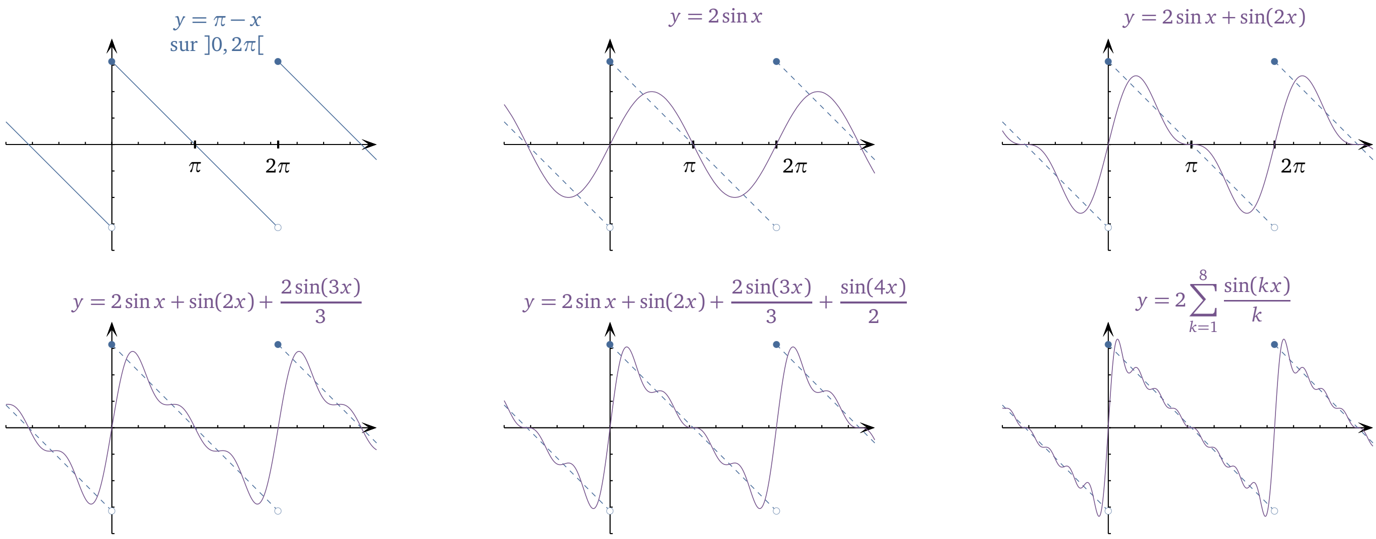
a) Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $\quad S_n(f)(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)D_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $t\overset{g}{\longmapsto}\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\sin\frac{t}{2}}$, définie sur $]0,\pi]$, peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)\,\sin\frac{(2n+1)\,t}{2}\,\mathrm{d}t$, puis que :
$$S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \textit{(théorème de Dirichlet)}, \qquad \text{i.e. que } \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

6) Montrer que pour tout $x \in]0, 2\pi[$: $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$. Qu'en déduit-on pour $x = \dfrac{\pi}{2}$?

On montre de même que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$: $\displaystyle \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2k+1)\,x\big)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi\,(\pi - 2\,|x|)}{8}$. Et pour $x = 0$?



3 Injectivité de l'application « coefficients de Fourier »

7) Soit $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que f est réelle et continue en 0.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$: $\displaystyle \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(\cos t + 2\varepsilon)^n\,\mathrm{d}t = 0$.

On suppose à présent par l'absurde que $f(0) > 0$. Par continuité de f en 0, il existe un réel $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour lequel pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$: $\quad f(x) \geqslant \dfrac{f(0)}{2}$.

b) Justifier l'existence de deux réels $\varepsilon > 0$ et $\beta \in]0, \alpha]$ pour lesquels : $\quad \forall x \in [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi], \quad |\cos x + 2\varepsilon| \leqslant 1 - \varepsilon$ et $\quad \forall x \in [-\beta, \beta], \quad \cos x \geqslant 1 - \varepsilon$.

c) En déduire que $\displaystyle \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(\cos t + 2\varepsilon)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, puis que $f(0) = 0$.

8) Soit $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que f est continue en 0. Que valent les coefficients de Fourier de la fonction conjuguée $\overline{f}$? En déduire que $f(0) = 0$.

9) Soit $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f est nulle sur $[0, 2\pi[$ privé d'un nombre fini de points. Sur quel ensemble de fonctions l'application $f \longmapsto \widehat{f}$ est-elle injective ?

10) Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que si la suite de fonctions $\big(S_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, c'est forcément vers f.

11) Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

a) Exprimer $\widehat{f''}(n)$ en fonction de $\widehat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire que la suite de fonctions $\big(S_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.