

# EULER, LE SINUS ET LA FONCTION $\zeta$

## (INDICATIONS)

### 1 UNE CURIEUSE FACTORISATION DU SINUS

- 1) a) Formule de Moivre !  
b)

### 2 VERSION DISCRÈTE DU THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

- 2) a)  
b)  
c) Revenir à la définition de la limite.
- 3) Poser  $u_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$  pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ , y compris pour  $k > n$ , auquel cas  $u_{n,k} = 0$ .
- 4) a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $e^x \geq 1 + x$ .  
b)
- 5) D'après 4)b), un produit infini n'est jamais qu'une somme infinie, on peut donc utiliser la version discrète du théorème de convergence dominée.
- 6)

### 3 INTRODUCTION AUX SÉRIES ENTIÈRES

- 7) Se donner un réel  $r$  pour lequel  $|x| < r < R$ . La série  $\sum u_n r^n$  converge !
- 8) a)  
b)

### 4 RELATION DE RÉCURRENCE ENTRE $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6) \dots$

- 9) a) Permuter des sommes, puis dériver.  
b) Les coefficients d'une série entière sont uniques !  
c)