Racines carrées d'un endomorphisme (indications)

1 Premiers exemples

1) **a)**

b) Que vaut le produit de deux matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$?

2) **a)** Les noyaux itérés de $P \longmapsto P'$ sont parfaitement connus, leurs dimensions en particulier.

b) Si $r \in \mathscr{R}(f)$, alors $r^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3) **a)** Pour construire à la main une infinité de symétries, construire soigneusement une infinité de supplémentaires d'un sous-espace vectoriel fixé.

b) Partir d'un élément de $G \cap r(G)$ et se débrouiller pour qu'un certain multiple de a appartienne à $F + r(F)$.

c)

2 À propos de certains polynômes annulateurs ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

4) **a)**

b)

c) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha p + \beta q \in \mathscr{R}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \dots \quad$ Exploiter la liberté de la famille (p, q).

5) **a)**

b) Montrer que $r = \alpha_1 p + \alpha_2 q$.

6) Quitte à permuter λ et μ, on peut supposer que $\mathrm{Ker}\big(p - \mathrm{Id}_E\big)$ est de dimension au moins 2, donc contient e_1 et e_2. Construire une racine carrée de f à partir de la base $(e_1, \dots, e_n)$ et se débrouiller pour que e_1 ne soit pas envoyé sur un multiple de lui-même.

7) **a)**

b)

3 Cas des automorphismes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

8)

9) **a)**

b)

c)

10)