# BERNSTEIN ET LES FONCTIONS ABSOLUMENT MONOTONES

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **7)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Dans ce problème, $I$ est un intervalle et $r$ un réel strictement positif.

On dit qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est *absolument monotone sur $I$* si la fonction $f^{(n)}$ est positive sur $I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, la fonction exponentielle est absolument monotone sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions réelles absolument monotones sur $I$ sera noté $\mathscr{A}(I)$.

Pour tous $f \in \mathscr{A}(I)$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose enfin $\Delta_{f,n}(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$.

**1)** Montrer que $\mathscr{A}(I)$ est *stable par dérivation*, i.e. que : $\forall f \in \mathscr{A}(I), \quad f' \in \mathscr{A}(I)$.

**2)** Pour quelles valeurs du réel $\alpha$ la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

**3)** **a)** Montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} -\ln(1-x)$ est absolument monotone sur $[0,1[$ et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n$ la fonction $x \longmapsto \ln(1-x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ et $\psi_n$ la fonction $x \longmapsto \varphi_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ sur $[0,1[$.

**b)** Factoriser $\varphi_n'$ et $\psi_n'$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**c)** En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Si jamais vous avez déjà entendu parler de la *formule de Leibniz* de dérivation d'un produit, eh bien vous n'avez pas le droit de l'utiliser dans la question qui suit. Elle sera démontrée plus tard et en attendant, on fait sans.

**4)** Montrer que $\mathscr{A}(I)$ est *stable par produit* : $\forall f,g \in \mathscr{A}(I), \quad fg \in \mathscr{A}(I)$.

Dans les questions **5)** à **8)**, on étend à toutes les fonctions absolument monotones le résultat de la question **3)c)** relatif à la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$.

**5)** **a)** Exprimer $\Delta'_{f,n+1}$ en fonction de $\Delta_{f',n}$ pour tous $f \in \mathscr{A}(I)$ et $n \in \mathbb{N}$.

**b)** En déduire que $\Delta_{f,n}$ est positive sur $[0,r[$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{A}\big([0,r[\big)$.

**6)** Soit $\lambda \geqslant 1$.

**a)** Soit $f \in \mathscr{A}\big([0,r[\big)$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante sur $]0,r[$, puis que pour tout $x \in [0,r[$ : $\lambda\Delta_{f,0}(x) \leqslant \Delta_{f,0}(\lambda x)$.

**b)** Montrer que pour tous $f \in \mathscr{A}\big([0,r[\big)$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,r[$ : $\lambda^{n+1}\Delta_{f,n}(x) \leqslant \Delta_{f,n}(\lambda x)$.

**7)** Soit $f \in \mathscr{A}\big([0,r[\big)$.

**a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x,y \in [0,r[$ pour lesquels $x \leqslant y$ : $0 \leqslant \Delta_{f,n}(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

**b)** En déduire que pour tout $x \in [0,r[$ : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ (*théorème de Bernstein*).

**8)** Soit $f \in \mathscr{A}\big(]-r,r[\big)$.

**a)** Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) + f(-x)$ est absolument monotone sur $[0,r[$.

**b)** En déduire que pour tout $x \in ]-r,r[$ : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$.

**9)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ et que pour tout $x \in ]-1,1[$ : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.

**10)** Soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$.

**a)** Montrer que pour tous $a, x \in \mathbb{R}$ : $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$

**b)** En déduire que si $f$ s'annule sur $\mathbb{R}$, $f$ est identiquement nulle.

**11)** Soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$ une fonction pour laquelle $f(0) = f'(0) = 1$. D'après **10)b)**, $f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

**a)** Montrer que pour tous $a, x \in \mathbb{R}$ : $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2 (x-a)^k = (x-a)^2 f''(x) + (x-a) f'(x).$

**b)** En déduire, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $a \in ]-\infty, x[$ :

$$(x-a) f'(x)^2 \leqslant f(x)\Big((x-a) f''(x) + f'(x)\Big).$$

**c)** En déduire que $f'^2 \leqslant f f''$ sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction $\ln \circ f$ y est convexe.

**d)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\quad f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$.