Étude approfondie d'une suite récurrente

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : partie **1**.

— Piste rouge : parties **1** et **2**.

— Piste noire : tout le devoir.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{S}$ pour laquelle $u_0 = x$ et $u_1 = y$ est notée $\big(u_n(x, y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, mais on peut la noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand x et y sont fixés sans ambiguïté. Si $\big(u_n(x, y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, celle-ci est notée $\ell(x, y)$.

Enfin, pour tout $\alpha \in [0, +\infty]$, on pose $E_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \quad u_n(x, y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\right\}$.

1 Délicates variations

1) Déterminer les suites constantes de $\mathscr{S}$ et montrer que l'ensemble $\left\{\alpha \in [0, +\infty] \mid \quad E_\alpha \neq \varnothing\right\}$ est fini.

2) a) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ dont trois termes consécutifs sont égaux est constante.

b) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ dont deux termes consécutifs sont égaux à 1 est constante.

c) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ dont un terme autre que les deux premiers est nul est constante.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ non constante. Comparer les signes de $u_{n+3} - u_{n+2}$ et $u_{n+2} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ non constante. Montrer que si $u_{N+2} \geqslant u_N$ et $u_{N+2} \geqslant u_{N+1}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\geqslant N+1}$ est croissante.

On peut montrer de même que si $u_{N+2} \leqslant u_N$ et $u_{N+2} \leqslant u_{N+1}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\geqslant N+1}$ est décroissante.

5) Montrer que la suite $\big(u_n(2, 0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite et calculer $\ell(2, 0)$.

6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ non monotone à partir d'un certain rang.

a) Montrer que $u_{n+2} - u_n$ et $u_{n+3} - u_{n+1}$ sont de signes opposés pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

7) Montrer que toute suite de $\mathscr{S}$ possède une limite et déterminer l'ensemble $\left\{\alpha \in [0, +\infty] \mid \quad E_\alpha \neq \varnothing\right\}$.

8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$ non constante.

a) Montrer que si $u_N \geqslant 1$ et $u_{N+1} \geqslant 1$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et de limite $+\infty$.

b) Montrer de même que si $u_N \leqslant 1$ et $u_{N+1} \leqslant 1$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et de limite nulle.

2 Quel infini ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln \dfrac{u_n}{2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

9) a) Pourquoi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante à partir d'un certain rang ? On note N un tel rang.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad \dfrac{u_n^2}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n^2}{2} + u_n \quad$ et en déduire que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est monotone.

c) Montrer que $v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{2}{u_n}\right)$ pour tout $n \geqslant 2$, puis $0 \leqslant v_p - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 + \dfrac{2}{u_n}\right)$ pour tous $n \geqslant N$ et $p \geqslant n$.

d) Trouver deux suites strictement positives $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ mais $a_n^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} b_n^n$.

e) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif qu'on ne cherchera pas à calculer, puis que pour un certain $\lambda > 1$: $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\lambda^{2^n}$.

3 Description des ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$

10) Comparer $\ell(x,y)$ et $\ell(x',y')$ pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$ pour lesquels $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

11) Soient $(x,y) \in E_1$ et $(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$ distincts pour lesquels $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

a) Montrer que $u_2(x,y) < u_2(x',y')$ et $u_3(x,y) < u_3(x',y')$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n(x,y) + u_{n+1}(x,y) \geqslant 1$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad u_n(x,y) + \varepsilon \leqslant u_n(x',y') \quad$ où $\varepsilon = \min\left\{u_2(x',y') - u_2(x,y)\,,\, u_3(x',y') - u_3(x,y)\right\}$.

d) En déduire que $(x',y') \in E_{+\infty}$.

12) Soient $(x,y) \in E_1$ et $(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$ distincts pour lesquels $x' \leqslant x$ et $y' \leqslant y$. Déduire des questions précédentes que $(x',y') \in E_0$.

13) **a)** Montrer que la fonction $t \longmapsto u_n(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$.

Dans les questions **b)** et **c)**, on utilisera librement la définition epsilonesque suivante de la continuité au point $y \geqslant 0$, qui sera étudiée plus tard dans l'année : $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall t \geqslant 0, \quad |t - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|u_n(x,t) - u_n(x,y)\big| < \varepsilon$.

b) Montrer que pour tout $(x,y) \in E_{+\infty}$, il existe un réel $\delta \in\,]0,y]$ pour lequel $\{x\} \times\,]y-\delta, y+\delta[\, \subset E_{+\infty}$.

c) Montrer de même que pour tout $(x,y) \in E_0$, il existe un réel $\delta \in\,]0,y]$ pour lequel $\{x\} \times [y, y+\delta[\, \subset E_0$.

14) Soit $x \geqslant 0$. On suppose que la demi-droite verticale $\big\{(x,t) \mid \quad t \geqslant 0\big\}$ rencontre à la fois E_0 et $E_{+\infty}$.

a) Montrer que l'ensemble $\big\{t \geqslant 0 \mid \quad \ell(x,t) = 0\big\}$ possède une borne supérieure.

b) En déduire qu'il existe un et un seul réel $y \geqslant 0$ pour lequel $(x,y) \in E_1$.

En inversant abscisses et ordonnées dans les questions **13)** et **14)**, on montre de même le résultat suivant pour tout $y \geqslant 0$:

Si la demi-droite horizontale $\big\{(t,y) \mid \quad t \geqslant 0\big\}$ rencontre à la fois E_0 et $E_{+\infty}$,
il existe un et un seul réel $x \geqslant 0$ pour lequel $(x,y) \in E_1$.

15) **a)** Montrer qu'il existe un et un seul réel $\tau \geqslant 0$ pour lequel $(\tau, 0) \in E_1$ et montrer plus précisément que $\tau \in \big[\sqrt{2}, 2\big]$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,\tau]$, il existe un et un seul réel $y \geqslant 0$, noté $\varphi(x)$, pour lequel $(x,y) \in E_1$.

c) Montrer que E_1 est exactement le graphe de la fonction $\varphi : [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie.

16) **a)** Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0,\tau]$.

b) Montrer que $\ell\left(y, \dfrac{x^2+y^2}{2}\right) = \ell(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, puis que $\varphi\big(\varphi(x)\big) = \dfrac{x^2 + \varphi(x)^2}{2}$ pour tout $x \in [0,\tau]$.

c) Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$, puis montrer que $\varphi\big([0,\tau]\big) = \left[0, \dfrac{\tau^2}{2}\right]$.

En principe, la décroissance de φ et l'égalité $\varphi\big([0,\tau]\big) = \big[\varphi(\tau), \varphi(0)\big]$ devraient vous convaincre que φ est continue sur $[0,\tau]$, mais il nous manque un petit argument théorique pour le prouver proprement.