LE MONDE A LA TAILLE D'UN CHEVEU

1) Montrer que la fonction $x \overset{\theta}{\longmapsto} \dfrac{x}{1+|x|}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, puis en déduire une injection de $\mathbb{R}$ dans $[0,1[$.

2) Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{1}_A(k)}{3^{k+1}}$.

a) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la suite $\big(\sigma_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\sigma(A)$ sa limite.

Soient A et B deux parties distinctes de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que $A \cup B \neq A \cap B$. On peut ainsi noter p le plus petit élément de $A \cup B$ qui n'appartient pas à $A \cap B$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant p+1$: $\quad \big|\sigma_n(A) - \sigma_n(B)\big| \geqslant \dfrac{1}{2.3^{p+1}}$. En déduire que σ est injective sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

3) Pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n(x) = \lfloor 2^{n+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^n x \rfloor$, puis $A_x = \big\{ n \in \mathbb{N} \mid \quad a_n(x) = 1 \big\}$.

a) Montrer que $a_n(x) \in \{0,1\}$ pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$: $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{A_x}(k)}{2^{k+1}} = x$.

c) En déduire que l'application $x \longmapsto A_x$ est injective sur $[0,1[$.

4) Soient E un ensemble et $\varphi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ une application croissante au sens de l'inclusion, i.e. pour laquelle pour toutes parties A et B de E : $\quad A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \varphi(A) \subset \varphi(B)$.

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des parties A de E pour lesquelles $A \subset \varphi(A)$ et M la réunion de toutes ces parties. Montrer que $M \in \mathscr{M}$, puis que $\varphi(M) = M$. On a ainsi prouvé que φ possède un point fixe (*théorème de Tarski*).

5) Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. On pose alors $\varphi(A) = E \setminus g\big(F \setminus f(A)\big)$ pour toute partie A de E.

a) Montrer que φ possède un point fixe M.

b) Montrer que $f|_M$ est bijective de M sur $f(M)$ et que $g|_{F\setminus f(M)}$ est bijective de $F \setminus f(M)$ sur $E \setminus M$.

c) En déduire proprement que E et F sont équipotents (*théorème de Cantor-Bernstein*).

6) **a)** Montrer que l'application $(A,B) \longmapsto (2A) \sqcup (2B+1)$ est injective sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, où l'on a posé :

$$2A = \big\{ 2a \mid \quad a \in A \big\} \qquad \text{et} \qquad 2B+1 = \big\{ 2b+1 \mid \quad b \in B \big\}.$$

b) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

c) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont équipotents pour tout $n \geqslant 2$.

Conclusion : il y a autant d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents, il y a même autant d'éléments dans $]0,1[$ que dans notre espace géométrique usuel $\mathbb{R}^3$.