π PAR-CI, π PAR-LÀ

Les trois formules suivantes sont l'objectif de ce devoir.

Théorème $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Je rappelle qu'à ce stade, toute somme infinie est par définition la limite d'une suite convergente et requiert à ce titre une justification de convergence.

1 π PAR-CI

On définit la fonction *tangente* sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par la relation $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$.

1) a) Montrer que tan est dérivable sur D et exprimer $\tan'$ en fonction de tan.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\quad 0 \leqslant \tan x \leqslant 1$.

On pose à présent $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right) \tan^{2k} x \,\mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en déduire sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.$$

3) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4n+2}$.

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

2 INTERMÈDE

4) On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer sans calculer l'intégrale que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geqslant 2$: $\quad \dfrac{1}{k^p} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais aussi que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note α sa limite.

c) Exprimer a_{2n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3\alpha}{4}$.

5) Soient $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant p_0$. Montrer que : $\quad \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k p_k\right| \leqslant p_0$.

3 π PAR-LÀ

On pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $d_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6) a) Montrer que $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de α.

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad c_n^2 = d_n + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}\right) = d_n + \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $s_{n,i} = \displaystyle\sum_{\substack{-n\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}$ pour tout $i \in [\![-n,n]\!]$.

a) Montrer que $s_{n,-i} = -s_{n,i}$ pour tout $i \in [\![-n,n]\!]$ et calculer $s_{n,0}$.

b) En déduire que : $\quad c_n^2 - d_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i-1}$.

c) Montrer, en posant notamment $k = j-i$, que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\quad s_{n,i} = \displaystyle\sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, puis en déduire que $|s_{n,i}| \leqslant \dfrac{1}{n-i+1}$.

d) En déduire que : $\quad \left|c_n^2 - d_n\right| \leqslant \dfrac{4}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ après avoir factorisé $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{n-i+1}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

9) Montrer finalement que : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.