Polynômes sous contrainte

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **4)**.

— Piste rouge : questions **1)** à **5)**.

— Piste noire : tout le devoir.

On s'intéresse dans ce devoir aux polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lequel $P(E) \subset F$ pour différentes parties E et F de $\mathbb{C}$. On pose pour cela $\mathscr{I}(E,F) = \Big\{ P \in \mathbb{C}[X] \mid \quad P(E) \subset F \Big\}$.

En TD, on a par exemple montré que $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{I}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[X]$ en exploitant des polynômes de Lagrange.

1) Déterminer $\mathscr{I}(E,F)$ pour toute partie infinie E de $\mathbb{C}$ et toute partie finie F de $\mathbb{C}$.

2) **a)** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ non nul de degré n. On pose $P^\star = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} X^k$. Exprimer $P(u)\, P^\star(u)$ en fonction de $|P(u)|^2$ pour tout $u \in \mathbb{U}$.

b) En déduire $\mathscr{I}(\mathbb{U},\mathbb{U})$.

3) D'après le résultat d'un exercice de TD rappelé ci-dessus : $\quad \mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+) \subset \mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que pour tout $P \in \mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ non nul, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.

b) Caractériser les éléments de $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ par leur forme scindée, puis montrer que :

$$\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+) = \Big\{ A^2 + B^2 \mid \quad A, B \in \mathbb{R}[X] \Big\}.$$

4) On appelle *polynômes de Hilbert* les polynômes $H_0 = 1$ et $H_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est une combinaison linéaire de $H_0, \dots, H_n$.

b) Montrer, par double comptage, que pour tous $p \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$ et $i \in [\![0,k]\!]$: $\quad \dbinom{p}{k}\dbinom{k}{i} = \dbinom{p}{i}\dbinom{p-i}{k-i}$.

c) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes pour lesquels $P = \lambda_0 H_0 + \dots + \lambda_n H_n$. Montrer que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$: $\quad \lambda_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \dbinom{p}{k} P(k)$.

d) Montrer que H_k appartient à $\mathscr{I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $\mathscr{I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ ne coïncide pas avec $\mathbb{Z}[X]$.

e) Montrer que $\mathscr{I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de polynômes de Hilbert et que $\mathscr{I}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) = \mathscr{I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

5) Soit $P \in \mathscr{I}(\mathbb{N},\mathbb{P})$. On note n son degré et on pose $Q = P(n!X)$.

a) Montrer que $Q \in \mathbb{Z}[X]$.

b) Montrer que $Q\big(k + Q(k)\big)$ est divisible par $Q(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) En déduire $\mathscr{I}(\mathbb{N},\mathbb{P})$.

La fin du devoir est consacrée à la détermination de $\mathscr{I}(\mathbb{N},C)$ où $C = \Big\{ n^2 \mid \quad n \in \mathbb{N} \Big\}$ est l'ensemble des carrés parfaits.

6) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire. Montrer que si $P^2 \in \mathbb{Q}[X]$, alors $P \in \mathbb{Q}[X]$.

7) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant de degré $2n$. On suppose que le coefficient dominant de P est le carré d'un rationnel.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{Q}[X]$ de degré k pour lequel :

$$P - X^{2(n-k)} Q_k^2 \in \mathbb{Q}_{2n-k-1}[X].$$

Dans la suite de la question, on suppose $P \neq Q_n^2$. On se donne un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $d\, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ et on pose $R = d^2 \big(P - Q_n^2\big)$.

b) Montrer que les fonctions $k \longmapsto R(k)$ et $k \longmapsto Q_n(k)$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang N.

c) Montrer que pour tout entier $k \geqslant N$: $\quad P(k) \in C \quad \Longrightarrow \quad |R(k)| \geqslant 2d\, |Q_n(k)| - 1 > 0$.

d) En déduire que l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \mid \quad P(k) \in C\right\}$ est fini.

8) Soit $P \in \mathscr{I}(\mathbb{N}, C)$ non constant de degré n et de coefficient dominant a. On se donne un entier $r \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $|z| < r$ pour toute racine z de P dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $P(X)P(X+2r) = Q^2$ pour un certain polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$.

b) En déduire que $P = A^2$ pour un certain $A \in \mathscr{I}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$.

Finalement, en tenant compte des polynômes constants, $\mathscr{I}(\mathbb{N}, C) = \left\{A^2 \mid \quad A \in \mathscr{I}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})\right\}$.