# Questions de rationalité

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **4)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

On pose $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \left\{ a + \mathrm{i}b \mid \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ et $\mathbb{Q}[\mathrm{i}] = \left\{ a + \mathrm{i}b \mid \quad a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

**1)** **a)** Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est *stable par addition et produit*, i.e. que pour tous $z, z' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ : $\quad z + z' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \quad$ et $\quad zz' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

**b)** Soit $P$ un polynôme de degré $n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ avec $v$ non nul :

$$v^n P\left(\frac{u}{v}\right) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}].$$

**2)** Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n$ la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^n (1-t)^n}{n!}$ et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{e}^{zt}\, \mathrm{d}t$.

**a)** Montrer que $r^n I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $r \in \mathbb{C}$.

**b)** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ : $\quad I_n = \dfrac{1}{z^2} \displaystyle\int_0^1 f_n''(t)\, \mathrm{e}^{zt}\, \mathrm{d}t$.

**c)** Exprimer $f_{n+2}''$ comme une combinaison linéaire de $f_n$ et $f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que :

$$I_{n+2} = \frac{I_n - (4n+6)\, I_{n+1}}{z^2}.$$

**d)** En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un polynôme $P_n$ de degré $n$ à coefficients entiers pour lequel :

$$I_n = \frac{P_n(z) - P_n(-z)\, \mathrm{e}^z}{z^{2n+1}}.$$

**3)** Avec les mêmes notations, on fait l'hypothèse que $z$ et $\mathrm{e}^z$ appartiennent tous les deux à $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$. Il existe donc des éléments $p, a \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ avec $p$ non nul et des entiers $q, b \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $z = \dfrac{p}{q}$ et $\mathrm{e}^z = \dfrac{a}{b}$.

**a)** Montrer que $bp^{2n+1} I_n \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** En déduire que $I_0 = 0$, puis que $z \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.

**4)** **a)** Montrer que $\pi$ est irrationnel.

**b)** En déduire que $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ pour tout $z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]^*$ et que $\mathrm{e}^x$ est irrationnel pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$.

**c)** Que peut-on dire du logarithme d'un rationnel strictement positif ?

**d)** Exprimer $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ en fonction de $\tan x$ pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[ + \pi\mathbb{Z}$. En déduire que $\tan r$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$.

**5)** Dans cette question, on reprend les notations de la question **2)** dans le cas particulier où $z = \mathrm{i}\pi$.

**a)** Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un polynôme $Q_n$ de degré au plus $n$ à coefficients entiers pour lequel :

$$I_n = \frac{\mathrm{i}\, Q_n\left(\pi^2\right)}{\pi^{2n+1}}.$$

**b)** En déduire que $\pi^2$ est irrationnel.