

UN PEU D'EXPONENTIELLE, UN PEU DE NOYAU

Deux niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : partie 1 et partie 2 questions 1) à 3).
- Piste rouge : tout le devoir.

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 CARACTÉRISATION DE L'INVERSIBILITÉ PAR LE NOYAU

Dans tout ce problème, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition (Noyau d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *noyau de A* et on note $\text{Ker } A$ l'ensemble $\{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0\}$ des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$.

- 1) Montrer que pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$: $\text{Ker } A = \{0\}$.
- 2) Soient $U \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$, $V \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$ et $W \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice pour laquelle $\text{Ker } A = \{0\}$.
 - a) Montrer que A ne possède pas de colonne nulle.
 - b) En déduire l'existence de matrices $P \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ pour lesquelles $PA = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
 - c) Soit $Y \in \text{Ker } B$. Trouver un scalaire $x \in \mathbb{K}$ pour lequel $\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$.
- 4) Déduire des résultats précédents que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\text{Ker } A = \{0\}$, alors A est inversible.

On a finalement démontré le résultat important suivant.

Théorème (Caractérisation de l'inversibilité par le noyau)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\text{Ker } A = \{0\}$.

On sait déjà qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$. La caractérisation qui précède montre qu'il n'est en fait pas nécessaire de résoudre ce système **POUR TOUT SECOND MEMBRE**. La matrice A est inversible si le système **HOMOGÈNE** qui lui est associé n'a pas d'autre solution que la solution évidente 0.

- 5) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - a) Montrer que si $AB = I_n$, A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre. En quoi ce résultat est-il intéressant ?
 - b) En déduire que si le produit AB est inversible, les matrices A et B le sont aussi. On connaissait la réciproque !
- 6) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $AB = \lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \dots + \lambda_p A^p$ pour certains $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ avec $\lambda_0 \neq 0$. Montrer que A et B commutent.

2 EXPONENTIELLE MATRICIELLE

Dans ce problème, les lettres m et n désignent des entiers naturels non nuls.

On rappelle que $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On pose alors pour tous $z \in \mathbb{C}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$e_p(z) = \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} \quad \text{et} \quad e_p(M) = \sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!}.$$

À présent, pour toute suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si la suite de coefficients $((A_p)_{ij})_{p \in \mathbb{N}}$ converge pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La matrice $(\lim_{p \rightarrow +\infty} (A_p)_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est alors appelée la limite de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Par exemple, avec des notations évidentes : $\begin{pmatrix} 1 & 3^{-p} \\ 2^{-p} & 1+4^{-p} \end{pmatrix} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} I_2$.

On admet momentanément que la suite $(e_p(M))_{p \in \mathbb{N}}$ converge pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers une matrice appelée l'exponentielle de M et notée e^M ou $\exp(M)$.

- 1) Calculer pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, z \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
- a) $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$. b) $\exp\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. c) $\exp\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer les relations : $\cos \theta = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}$ et $\sin \theta = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
- b) En déduire $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

On pose à présent pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\|M\| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$. Oui oui, la norme d'une matrice !

4) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ et $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

5) Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Montrer que si la suite $(\sum_{k=0}^p |u_k|)_{p \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(\sum_{k=0}^p u_k)_{p \in \mathbb{N}}$ converge aussi. On commencera par traiter le cas où $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est réelle.

6) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On justifie dans cette question la bonne définition de e^M .

- a) Montrer que la suite $(\sum_{k=0}^p \frac{\|M^k\|}{k!})_{p \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- b) En déduire que la suite $(e_p(M))_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

7) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent.

- a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\|e_p(A)e_p(B) - e_p(A+B)\| \leq e_p(\|A\|)e_p(\|B\|) - e_p(\|A\| + \|B\|)$.
- b) En déduire que $e^{A+B} = e^A e^B$.

8) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, e^A est inversible et préciser son inverse.