

# ARITHMÉTIQUE DES ANNEAUX EUCLIDIENS (INDICATIONS)

## 1 ANNEAUX EUCLIDIENS

- 1)
- 2) a)  
b)  
c)
- 3) Pour chaque inclusion, jouer calmement avec les différents axiomes de la définition d'un anneau euclidien en choisissant bien les éléments et les divisions euclidiennes à exploiter.
- 4) a)  
b)  
c) Si  $b$  est non nul, s'intéresser à la division euclidienne de  $a$  par  $b$  pour montrer que  $b$  divise  $a$ .
- 5) a)  
b)
- 6)
- 7) Par récurrence sur  $\varphi(a)$ . Dans le cas où  $a = bc$  avec  $b, c \in A \setminus U(A)$ , montrer proprement que  $\varphi(b) \leq n$  et  $\varphi(c) \leq n$ .
- 8)
- 9) À partir de cette question, il est utile d'observer que si  $a = bc$  dans  $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ , alors  $|b|^2$  divise  $|a|^2$  dans  $\mathbb{Z}$ . Pour la deuxième partie de la question, raisonner par l'absurde et exploiter le lemme d'Euclide.

## 2 RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DE MORDELL

- 10) a)  
b) Raisonner modulo 4.
- 11) Avec les notations de la question 10), montrer que  $y + i\sqrt{2} = (a + ib\sqrt{2})^3$  pour certains  $a, b \in \mathbb{Z}$ , puis identifier les parties réelle et imaginaire et triturer.

## 3 UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE MIHĂILESCU

- 12) a)  
b) Adapter la stratégie de la question 11).  
c)  
d) Formule du capitaine!