Équations de Pell-Fermat et théorème de Størmer (indications)

1 Équations de Pell-Fermat

1)

2) a)

b)

c) $(xx'+nyy')^2-n(xy'+yx')^2=\left(x^2-ny^2\right)\left(x'^2-ny'^2\right)$.

d) $n(yx')^2=n(xy')^2+x^2-x'^2$.

e) Pour montrer que tout élément g de G_n s'écrit de la forme souhaitée, commencer par définir proprement un entier i pour lequel $\left(a+b\sqrt{n}\right)^i\leqslant g<\left(a+b\sqrt{n}\right)^{i+1}$.

3) a) En notant k l'entier pour lequel $j=ik$: $\left(a+b\sqrt{n}\right)^j=\left(\left(a+b\sqrt{n}\right)^i\right)^k$. Identifier ensuite grâce à l'injectivité de l'application $(x,y)\longmapsto x+y\sqrt{n}$.

b) L'entier c_i est une somme du genre $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2i+1\leqslant k}\dots$ et $c_i\equiv ia^{i-1}\ [n]$.

c)

4) a) Raisonner par l'absurde et se souvenir que $a\wedge n=1$.

b) Raisonner par l'absurde et montrer que $2a+1$ et $2a-1$ sont des 3-nombres.

c) Montrer que p divise $\dbinom{p}{3}$.

5)

2 Théorème de Størmer

6) a) Avec des notations évidentes, découper soigneusement le produit $x^2-1=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ en deux de façon à l'écrire ny^2 où $n\in D$ et où y est un n-nombre.

b)

7) a)

b)