Étude approfondie d'une suite récurrente (indications)

1 Délicates variations

1)

2) **a)** Attention de ne pas oublier les premiers rangs !

b)

c)

3)

4) Montrer par exemple que $u_n \leqslant u_{n+2}$ et $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ pour tout $n \geqslant N$.

5)

6) **a)** Attention, la négation du résultat n'est pas « $u_{n+2} - u_n$ et $u_{n+3} - u_{n+1}$ sont positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou négatifs pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».

b) Attention, le résultat de la question **a)** ne montre pas que $u_{n+2} - u_n$ est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou négatif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c)

7)

8) **a)** On peut éventuellement observer que $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour un certain $\varepsilon > 0$, $u_n \leqslant 1 - \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N+2$.

2 Quel infini ?

9) **a)**

b)

c) Pour la deuxième partie de la question, télescopage !

d)

e) Pour la deuxième partie de la question, en notant μ la limite de $(v_n)_{n\geqslant 2}$, montrer que $\dfrac{u_n}{2\,\mathrm{e}^{2^n\mu}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par encadrement.

3 Description des ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$

10)

11) **a)**

b)

c)

d)

12)

13) **a)**

b) Utiliser **8)a)**.

c) Utiliser **8)b)**.

14) a)

b)

15) a)

b)

c)

16) a)

b)

c)