Devoir surveillé

1 On rappelle que pour tout $r > 0$, la fonction $x \longmapsto x^r = \mathrm{e}^{r \ln x}$, prolongée en 0 par la relation $0^r = 0$, est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$, puis montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Rappel : $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$.

On se propose dans ce problème de calculer plus généralement la limite $I(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{a}}+1}$ pour tout $a \in]0,1[$. On pose $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{a}}+1}$ pour tout $a \in]0,1[$.

2) Montrer soigneusement que pour tout $a \in]0,1[$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{a}}+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{a\,\varphi(1-a)}{1-a}$ en posant $u = t^{1-\frac{1}{a}}$.

Ce résultat justifie l'existence de $I(a)$ pour tout $a \in]0,1[$ et montre plus précisément, grâce à la relation de Chasles, que $I(a) = \varphi(a) + \dfrac{a\,\varphi(1-a)}{1-a}$. On fixe à présent une fois pour toutes un réel $a \in]0,1[$.

3) En intégrant une certaine somme géométrique, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a}{k+a} = \varphi(a) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\frac{n+1}{a}}}{t^{\frac{1}{a}}+1}\,\mathrm{d}t$, puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a}{k+a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(a)$.

4) En déduire que : $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} a^2}{k^2 - a^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(a) + \frac{a\,\varphi(1-a)}{1-a} = I(a)$.

5) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \big(\cos(ax) - 1\big)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{k-1} a \sin(a\pi)}{k^2 - a^2}$.

6) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,\pi]$: $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

7) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin\frac{x}{2}}$, définie et continue sur $]0,\pi]$, peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,\pi]$ tout entier.

8) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$. Déterminer un réel $M \geqslant 0$ pour lequel pour tout $\lambda > 0$: $\left|\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{\lambda}$, puis en déduire que : $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).

9) En admettant que le lemme de Riemann-Lebesgue reste valable pour une fonction seulement continue, et pas forcément de classe $\mathscr{C}^1$, déduire des résultats précédents que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin(a\pi)} - 1\right)$, puis que $I(a) = \dfrac{a\pi}{\sin(a\pi)}$.

10) (Ne pas traiter cette question) On prouve dans cette question finale la version continue du lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $g \in \mathscr{C}\big([0,\pi],\mathbb{C}\big)$. On pose $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^\pi \left|\sum_{k=-n}^n c_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$, puis que :

$$\int_0^\pi \left|g(x) - \sum_{k=-n}^n c_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^\pi |g(x)|^2\,\mathrm{d}x - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

b) En déduire que $c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

c) Montrer enfin que pour tout $f \in \mathscr{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$: $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin\frac{(2n+1)x}{2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

---

2 Soit $n \geqslant 2$ fixé. On s'intéresse dans ce problème à des puissances de matrices symétriques. On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: $\quad \mathrm{tr}(M^2) \geqslant 0$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ? Le résultat servira plusieurs fois par la suite !

2) Montrer que $M^k \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ pour tous $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, puis que 0 est la seule matrice nilpotente de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

On s'intéresse désormais aux matrices symétriques dont une puissance est la matrice identité. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{U}_p = \left\{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid \quad M^p = I_n\right\}$, puis $\mathscr{U} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathscr{U}_p$.

3) On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, puis on pose $M(a,b) = aI_n + bJ$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et enfin $\mathscr{M} = \left\{M(a,b) \mid \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Montrer **SANS** récurrence que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad M(a,b)^p = M\left(a^p, \dfrac{(a+nb)^p - a^p}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{U}$: $\quad M^2 = I_n$.

4) Soit $M \in \mathscr{U}_4$. Simplifier $\left(M^2 - I_n\right)^2$ et $\left(M^3 - M\right)^2$, puis montrer que $M^2 = I_n$.

5) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ impair et $M \in \mathscr{U}_p$. On pose $S = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

a) Montrer que $S^2 = pS$.

b) Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note r_k le reste de la division euclidienne de $2k$ par p. Montrer que l'application $k \longmapsto r_k$ est bijective de $[\![0, p-1]\!]$ sur lui-même.

c) En déduire que $\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant p-1} \left(M^j - M^i\right)^2 = 0$, puis que $M = I_n$.

Le résultat de la question **5)** est très spécifique aux matrices symétriques. Par exemple, pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie aisément que $M^3 = I_3$, mais M n'est pas symétrique et $M \neq I_3$.

6) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{U}$: $\quad M^2 = I_n$.

---

3 La question **1)** est tout à fait indépendante des questions **2)** et **3)**, qui sont liées au contraire.

1) Il n'est pas dur de vérifier que $51^2 = 7^4 + 200$. Réciproquement, soit $(x,n) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $x^2 = 7^n + 200$.

a) Montrer que $n = 2m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ en raisonnant modulo 4, puis montrer que $x + 7^m$ ou $x - 7^m$ est divisible par 25.

b) En déduire que $(x,n) = (51, 4)$.

On rappelle le *petit théorème de Fermat*. Pour tous $p \in \mathbb{P}$ et $x \in \mathbb{Z}$: $\quad x^p \equiv x\ [p]$, $\quad$ et si $x \wedge p = 1$, alors $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. On pose $E = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \quad x^k \equiv 1\ [n]\right\}$.

a) Montrer que E possède un plus petit élément e. On appelle e l'*ordre de x modulo n*.

b) Montrer que $E = e\,\mathbb{N}^*$.

c) Montrer que si $n \in \mathbb{P}$, alors e divise $n - 1$.

En résumé, l'ordre de x modulo n divise tout entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $x^k \equiv 1\ [n]$.

3) Soit $p \in \mathbb{P}$ fixé. On pose $x_n = 2^{p^n} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_n \equiv 1\ [p]$, $\quad x_n$ divise x_{n+1}, $\quad \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \equiv p\ [x_n]$ $\quad$ et $\quad x_n \wedge \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout diviseur premier q de $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, l'ordre de 2 modulo q vaut p^{n+1}.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p^n.