Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) On pose $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x+y+z+2t = 0 \quad \text{et} \quad x-y+z-t = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1,1),(2,1,-2,0),(1,0,1,-1)\big)$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et calculer sa dimension.

b) Montrer que $\dim(F \cap G) = 1$.

2) Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Vect}\big(X^3+X^2+X+1, X^3-X^2+3\big)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^k+1}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

4) Dans cette question, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient C un compact non vide de $\mathbb{K}$ et $r \geqslant 0$. Montrer que l'ensemble $C_r = \displaystyle\bigcup_{c\in C} \overline{\mathrm{B}}(c,r)$ est un compact de $\mathbb{K}$.

---

2 On s'intéresse dans ce problème aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants :

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Le polynôme $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est appelé le *polynôme caractéristique* d'une telle équation. Vous avez vu en Terminale et en physique que l'ensemble des solutions dépend de la forme scindée du polynôme caractéristique pour $n \in \{1,2\}$, mais le résultat n'est pas ici supposé connu.

Pour tout $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, on note S_P l'ensemble des solutions de l'équation $a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Par exemple : $\quad S_{X^2-X+2} = \left\{y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \quad y'' - y' + 2y = 0\right\}$.

Pour tous $r \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, on note e_r la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale $x \longmapsto P(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On admet que pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, f est constante si et seulement si f' est la fonction nulle.

Dernière remarque. Les espaces vectoriels manipulés dans ce problème sont tous des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Partie A – Premières observations, premiers exemples

1) Montrer que S_P est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

2) Montrer que $S_{X-r} = \mathrm{Vect}(e_r)$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. On pourra dériver une fonction de la forme $y\, e_{-r}$ pour voir ce que cela donne.

3) **a)** Montrer que S_{X^2-3X+2} contient S_{X-1} et S_{X-2}, puis que $S_{X^2-3X+2} = S_{X-1} \oplus S_{X-2}$.

b) Montrer que l'ensemble $\left\{y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \quad y'' - 3y' + 2y = e_4\right\}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et déterminer une base de sa direction.

4) Montrer que la famille $\big(x \longmapsto x^k\,\mathrm{e}^{rx}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est libre pour tout $r \in \mathbb{C}$.

5) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$: $\quad y \in S_{(X-r)P} \quad \Longleftrightarrow \quad y' - ry \in S_P$.

b) Montrer que S_P est stable par dérivation, puis que $S_P \subset S_{(X-r)P}$.

On déduit aisément de ce résultat par récurrence que $S_P \subset S_Q$ pour tous $P, Q \in \mathbb{C}$ pour lesquels P divise Q.

Partie B – Cas général

On pose $E_r = \left\{x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{rx} \mid \quad Q \in \mathbb{C}[X]\right\} = \left\{\widetilde{Q}\, e_r \mid \quad Q \in \mathbb{C}[X]\right\}$ pour tout $r \in \mathbb{C}$.

6) Montrer que E_r est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour tout $r \in \mathbb{C}$.

7) On souhaite montrer par récurrence que $E_{r_1}, \ldots, E_{r_p}$ sont en somme directe pour tous $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{C}$ distincts.

a) Initialisation : Montrer le résultat pour $p = 1$.

Hérédité : Soit $p \geqslant 2$. On suppose le résultat vrai au rang $p-1$. Soient $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{C}$ distincts et $Q_1, \ldots, Q_p \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $\widetilde{Q_1}\, e_{r_1} + \ldots + \widetilde{Q_p}\, e_{r_p} = 0$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$: $\quad (Q_k' + r_k Q_k) Q_p = (Q_p' + r_p Q_p) Q_k$, puis conclure.

8) Montrer par récurrence que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{C}$: $\quad S_{(X-r)^k} = \left\{ \widetilde{Q}\, e_r \mid \quad Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X] \right\}$.

9) Soient $r, u \in \mathbb{C}$ distincts et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\quad \forall f \in S_{(X-u)^k}, \quad \exists\, y \in S_{(X-u)^k}, \quad y' - ry = f$. On pourra commencer par calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto x^j\, \mathrm{e}^{(r-u)x}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

10) a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$: $\quad S_P \subset S_{(X-r_1)^{m_1}} + \ldots + S_{(X-r_s)^{m_s}}$ si on note $r_1, \ldots, r_s$ les racines distinctes de P et $m_1, \ldots, m_s$ leurs multiplicités respectives. Étant donnée une fonction $y \in S_P$, on pourra s'intéresser à la fonction $y' - r_1 y$ et exploiter le résultat de la question **9)**.

b) Que vaut la dimension de S_P pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul ? Déterminer une base de $S_{(X-1)(X+2)^3}$.

---

3 Dans ce problème, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) a) Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{K}$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est un compact non vide (*théorème des compacts emboîtés*).

b) Proposer une suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de $\mathbb{R}$ pour laquelle $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$.

2) a) Proposer deux parties denses de $\mathbb{R}$ dont l'intersection n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'intersection d'une partie dense de $\mathbb{K}$ et d'un ouvert dense de $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathbb{K}$.

3) Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbb{K}$. Soient en outre $a \in \mathbb{K}$ et $r > 0$.

a) Construire proprement deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles $x_0 = a$ et $\varepsilon_0 = r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \overline{\mathrm{B}}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset \mathrm{B}(x_n, \varepsilon_n) \cap O_n$.

b) En déduire que $\mathrm{B}(a, r) \cap \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est non vide, puis que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans $\mathbb{K}$ (*théorème de Baire*).

4) a) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{K}$: $\quad \overline{\mathbb{K} \smallsetminus A} = \mathbb{K} \smallsetminus \mathring{A}$.

b) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide de $\mathbb{K}$. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \mathbb{K}$.

Les questions **5)** et **6)** sont hors barème. À faire plus tard chez vous si le résultat vous intéresse !

5) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{C})$. On suppose $f([0,1])$ d'intérieur non vide. On peut ainsi se donner un point $a \in [0,1]$ et un réel $r > 0$ pour lesquels $\mathrm{B}(f(a), r) \subset f([0,1])$.

a) Pourquoi peut-on choisir a dans $]0,1[$ quitte à modifier r ? On fait ce choix désormais. Justifier l'existence d'un réel $\delta > 0$ pour lequel $[a-\delta, a+\delta] \subset [0,1]$ et pour lequel $f(a-\delta)$ et $f(a+\delta)$ appartiennent à $\mathrm{B}(f(a), r)$.

b) Montrer que $\mathrm{B}(f(a), r)$ est *convexe*, i.e. que pour tous $u, v \in \mathrm{B}(f(a), r)$:

$$[u, v] = \left\{ (1-\lambda)u + \lambda v \mid \quad \lambda \in [0,1] \right\} \subset \mathrm{B}(f(a), r).$$

c) Construire une fonction continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{B}(f(a), r)$ ne prenant pas la valeur $f(a)$ pour laquelle :

$$\gamma(0) = f(a-\delta) \qquad \text{et} \qquad \gamma(1) = f(a+\delta).$$

d) Justifier la bonne définition de la borne supérieure $b = \sup \left\{ t \in [0,1] \mid \quad \gamma(t) \in f([0,a]) \right\}$.

e) Montrer que $\gamma(b) \in f([0,a])$, puis que f n'est pas injective.

6) Montrer que pour toute famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues injectives de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$: $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n([0,1]) \neq \mathbb{C}$.

En résumé, on ne peut pas recouvrir $\mathbb{C}$ par un nombre dénombrable de courbes continues injectives. L'injectivité a ici beaucoup d'importance. En toute généralité, il est possible de recouvrir $\mathbb{C}$ à l'aide d'une seule courbe continue ! Historiquement, c'est le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932) qui l'a compris le premier, en exhibant une fonction continue surjective de $[0,1]$ sur le carré $[0,1] + \mathrm{i}[0,1]$ qu'on appelle aujourd'hui la *courbe de Peano*.