Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Résoudre l'équation $z^3 = \overline{z}^{\,2}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k} = \frac{2\sin x}{5-4\cos x}$.

3) Montrer que $\sup\left\{\sqrt{k} - \lfloor\sqrt{k}\rfloor \mid \quad k \in \mathbb{N}\right\} = 1$ en exploitant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

---

2 On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$. On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que f possède deux points fixes. On les note α et β avec $\alpha < \beta$. Préciser leur position par rapport à 0 et 1.

On admet pour gagner du temps que α et β sont les seuls points fixes de $f \circ f$.

2) Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle dans les cas suivants : **a)** $u_0 \geqslant \beta$. **b)** $u_0 \in [0,1]$.

c) $u_0 \in]1,\beta[$. On pourra commencer par montrer que $u_N \in [0,1]$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

---

3 On pose $\mathscr{H} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \quad \mathrm{Im}(z) > 0\right\}$ (*demi-plan de Poincaré*) et $\mathscr{E} = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad ad - bc > 0\right\}$.
On appelle ensuite *homographie de* $\mathscr{H}$ toute fonction définie sur $\mathscr{H}$ de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathscr{E}$.
On pose enfin pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$: $D_1(x) = \left\{x + \mathrm{i}y \mid \quad y > 0\right\}$ et $D_2(x,r) = \left\{x + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \quad \theta \in]0,\pi[\right\}$. Les ensembles ainsi définis sont appelés les *droites de* $\mathscr{H}$, que cela vous plaise ou non !

1) On note φ la fonction $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ définie sur $\mathscr{H}$. Montrer que φ est une homographie de $\mathscr{H}$ et qu'il en va de même de la fonction $z \longmapsto az + b$ pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

2) Soit $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie de $\mathscr{H}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathscr{E}$. Déterminer un réel λ pour lequel pour tout $z \in \mathscr{H}$:
$$\mathrm{Im}\big(h(z)\big) = \frac{\lambda\,\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}, \qquad \text{et en déduire que } h \text{ est à valeurs dans } \mathscr{H}.$$

3) Représenter graphiquement $D_1(x)$ et $D_2(x,r)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

4) Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On note h l'homographie $z \longmapsto az + b$ de $\mathscr{H}$. Compléter, en les justifiant, les égalités suivantes.
Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$: $h\big(D_1(x)\big) = D_1(\,.\overset{?}{.}\,.)$ et $h\big(D_2(x,r)\big) = D_2(\,.\overset{?}{.}\,.\,,\ .\overset{?}{.}\,.)$.

5) **a)** Déterminer $\varphi\big(D_1(0)\big)$.

b) Montrer que $\varphi\big(D_2(x,x)\big) = D_1\left(-\dfrac{1}{2x}\right)$ pour tout $x > 0$, puis de même que $\varphi\big(D_2(-x,x)\big)$ est une droite de $\mathscr{H}$ à préciser.

c) Déterminer une forme trigonométrique de $\varphi(x + \mathrm{i}y) + \dfrac{1}{2x}$ pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $y > 0$, puis montrer que $\varphi\big(D_1(x)\big)$ est une droite de $\mathscr{H}$ à préciser.

d) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ distinct de $|x|$. Montrer que pour tout $z \in \mathscr{H}$, en posant $z' = \varphi(z)$ et $R = r^2 - x^2$:
$$|z - x| = r \quad \Longleftrightarrow \quad \left|z' - \frac{x}{R}\right| = \frac{r}{|R|},$$
puis que $\varphi\big(D_2(x,r)\big)$ est une droite de $\mathscr{H}$ à préciser.

En résumé, φ envoie toute droite de $\mathscr{H}$ sur une droite de $\mathscr{H}$.

6) Déduire du résultat des questions **4)** et **5)** que toute homographie de $\mathscr{H}$ envoie toute droite de $\mathscr{H}$ sur une droite de $\mathscr{H}$.

---

4 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{\sqrt{u_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

1) a) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite $+\infty$.

On montre de même que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite $+\infty$, on l'admet.

b) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n^\alpha$ pour certains réels $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 1$ et $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

c) Montrer que $n^{\frac{2}{3}} \leqslant u_n \leqslant (n+1)^{\frac{2}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'encadrement obtenu montre que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{2}{3}}$. La suite du problème est difficile et dédiée à l'amélioration de cet équivalent.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \ln u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \ln(n-k)$. Petit bonus si vous y arrivez sans récurrence !

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \ln \dfrac{u_n}{n^{\frac{2}{3}}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \ln\left(1-\frac{k}{n}\right) - \frac{2\ln n}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On admet momentanément que pour tous $n \geqslant 2$ et $x \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$: $\quad \left|\ln(1-x)+x\right| \leqslant 4x^2 \ln n \quad \bigstar$.

3) a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k k = -\frac{2}{9}$ et justifier l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ pour lequel $k^2 \leqslant M\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que : $\quad n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \ln\left(1-\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{9}$.

c) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui ne s'annulent pas, de limite nulle et pour lesquelles $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Montrer que $\mathrm{e}^{a_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. En déduire un équivalent de $u_n - n^{\frac{2}{3}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Montrer finalement l'inégalité $\bigstar$ en étudiant la fonction $x \longmapsto 4x^2 \ln n + \ln(1-x) + x$.