Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes. Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1) Combien le mot COCORICO possède-t-il d'anagrammes qui commencent par une consonne ?

2) Combien peut-on former de mots de n lettres sur l'alphabet $\{A, B, C\}$:

a) en tout ?

b) dont deux lettres consécutives sont toujours distinctes ?

c) ne comportant pas à la fois un A, un B et un C ?

d) dont les lettres sont rangées dans l'ordre croissant (par exemple AAACC ou ABBCC pour $n = 5$) ?

3) Soit E un ensemble fini de cardinal n.

a) Soit X une partie fixée de E. Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E pour lesquels $A \cup B = X$?

b) Combien existe-t-il de triplets (A, B, X) de parties de E pour lesquels $A \cup B = X$?

4) Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite *idempotente* si $f \circ f = f$. On note $i(E)$ le nombre d'applications idempotentes de E dans E.

a) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que f est idempotente si et seulement si $f(x) = x$ pour tout $x \in f(E)$.

b) Montrer que $i(E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$. On pourra classer les applications idempotentes en fonction du cardinal de leur image.

Désormais, on suppose $n \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ et on note f la fonction $x \longmapsto (n-x)\ln x$ sur $[1, n]$.

c) Montrer que f' s'annule une et une seule fois sur $[1, n]$ en un réel α, puis que $\alpha \geqslant \dfrac{n}{\ln n}$.

d) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{(n-\alpha)^2}{\alpha}$, puis que f est majorée par $n \ln n \left(1 - \dfrac{1}{\ln n}\right)^2$ sur $[1, n]$.

e) En déduire que $k^{n-k} \leqslant \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, puis que $\dfrac{i(E)}{n^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

---

2 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que $\operatorname{Arctan} \dfrac{4}{3} = 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2}$.

2) On note f la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arccos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b) Montrer que $f(x) = 2 \operatorname{Arctan} |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par une technique de dérivation soigneusement justifiée.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction $x \longmapsto \left|\sin^n x \cos x\right|$ sur $\mathbb{R}$.

a) Expliquer proprement pourquoi, pour montrer que f_n possède un maximum et le calculer, on peut se contenter d'étudier cette fonction sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que f_n possède un maximum M_n et trouver un réel α_n pour lequel $M_n = f_n(\operatorname{Arctan} \alpha_n)$.

c) Simplifier $\cos(\operatorname{Arctan} t)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $M_n = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} M_n \sqrt{n}$.

---

3 On étudie dans ce problème quelques propriétés des itérées d'une application. Pour tout ensemble E, pour toute application $f : E \longrightarrow E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que f^n désigne la composée $f \circ \ldots \circ f$ (n termes) avec par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Lorsque f est bijective, on peut également noter f^{-n} la composée $f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans les questions **1)** et **2)**, E est un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application.

1) Montrer que la suite $\big(f^n(E)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, i.e. que $f^{n+1}(E) \subset f^n(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Dans cette question, on suppose que $f^p(E) = f^{p+1}(E)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant p$: $\quad f^k(E) = f^p(E)$.

b) Montrer que si f est injective, alors f est bijective.

3) a) Donner un exemple d'ensemble E et d'application injective $f : E \longrightarrow E$ pour lesquels la suite $\big(f^n(E)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante au sens de l'inclusion.

b) Soient E un ensemble fini et $f : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que $f^p(E) = f^{p+1}(E)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, puis que $f|_{f^p(E)}$ est une permutation de $f^p(E)$.

c) **(Difficile)** Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que l'ensemble $\mathscr{F} = \big\{f^k \mid \ k \in \mathbb{N}\big\}$ est fini. En appliquant le résultat de la question **b)** à l'application $\varphi \longmapsto \varphi^2$ sur $\mathscr{F}$, montrer que $\mathscr{F}$ contient une application *idempotente* g, i.e. pour laquelle $g^2 = g$.

Les questions suivantes sont indépendantes des précédentes. Désormais, E est un ensemble fini et σ une permutation de E.

4) Pour tous $x, y \in E$, on dit que $x \sim y$ si $y = \sigma^k(x)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

b) Soit $x \in E$. Pourquoi l'application $k \longmapsto \sigma^k(x)$ n'est-elle pas injective sur $\mathbb{N}$?
En déduire que l'ensemble $\big\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ \sigma^k(x) = x\big\}$ possède un plus petit élément $n(x)$.

c) Montrer que les éléments $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n(x)-1}(x)$ sont deux à deux distincts pour tout $x \in E$.

d) Montrer que pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour $\sim$ est l'ensemble $\big\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n(x)-1}(x)\big\}$.

5) On note $X_1, \ldots, X_r$ les classes d'équivalence distinctes de E pour $\sim$ et $n_1, \ldots, n_r$ leurs cardinaux respectifs. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note ensuite σ_i l'application de E dans E définie par les restrictions $\sigma_i|_{X_i} = \sigma|_{X_i}$ et $\sigma_i|_{E\setminus X_i} = \mathrm{Id}_{E\setminus X_i}$.

a) Montrer que $\sigma_i^{n_i} = \mathrm{Id}_E$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. En déduire que σ_i est une permutation de E.

b) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$ distincts : $\quad \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$.

c) Montrer que $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$.

d) Montrer que $\sigma^{n_1 \vee \ldots \vee n_r} = \mathrm{Id}_E$, où l'on rappelle que $n_1 \vee \ldots \vee n_r$ désigne le PPCM des entiers $n_1, \ldots, n_r$.