Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que pour tout $\alpha > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

2) Montrer que la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer son inverse.

3) Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

---

2 On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan}\left(x^3\right) \mathrm{d}x$.

1) Montrer que $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{2}$.

2) Soient a et b deux réels pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ strictement croissante. Montrer que :
$\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ après avoir justifié la bonne définition de l'intégrale de gauche.

3) Que vaut finalement $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\tan x}\,\mathrm{d}x$?

---

3 Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est *définie positive* si $X^\top MX > 0$ pour toute colonne non nulle $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il est équivalent de dire que $X^\top MX \geqslant 0$ pour toute colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec égalité si et seulement si $X = 0$.

On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle enfin que pour tous $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $(MN)^\top = N^\top M^\top$.

1) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note M la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Simplifier $X^\top MX$ pour toute colonne $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis en déduire que M est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ab > c^2$.

2) **a)** Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique définie positive sont tous strictement positifs.

b) À quelle condition nécessaire et suffisante une matrice diagonale est-elle symétrique définie positive ?

c) Montrer que $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $P^\top MP \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tous $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

e) Montrer que pour tous $a > 0$ et $M' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, si $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $M' \in \mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

3) **a)** Soit $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer, en exploitant des opérations élémentaires, une matrice triangulaire supérieure P dont les coefficients diagonaux valent 1 et pour laquelle les premières ligne et colonne de $P^\top MP$ sont nulles hors coefficient diagonal.

b) Montrer par récurrence <u>sur $n \in \mathbb{N}^*$</u> que pour tout $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une matrice triangulaire supérieure $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et pour laquelle $Q^\top MQ$ est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

c) En déduire que pour tout $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $M = T^\top T$ pour une certaine matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs (existence de la *décomposition de Cholesky de* M).

4) Soient $T_1, T_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On suppose que $T_1^\top T_1 = T_2^\top T_2$ et on pose $T = T_1 T_2^{-1}$.

a) Montrer que T est triangulaire supérieure.

b) Montrer que $T_1 = T_2$ (unicité de la *décomposition de Cholesky*).

---

4 On admet dans ce problème que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pose $f(0)=1$ et $f(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ pour tout $t \in]0,1[$.

1) Montrer que f est continue sur $[0,1[$.

On appelle *fonction dilogarithme* la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ sur $[0,1[$, notée Li_2.

2) **a)** Montrer que Li_2 est dérivable sur $[0,1[$ et étudier sa monotonie.

Cette monotonie prouve que Li_2 possède une limite en 1, notée ℓ et éventuellement infinie. Le théorème sous-jacent, momentanément admis, s'appelle le *théorème de la limite monotone*.

b) Montrer que pour tout $t \in [0,1[$: $\quad -\ln(1-t) \leqslant \dfrac{t}{1-t}, \quad$ puis que $f(t) \leqslant 1 - \ln(1-t)$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant 2x + (1-x)\ln(1-x), \quad$ puis que $\ell \in \mathbb{R}$.

3) **a)** Montrer que pour tous $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,du$.

b) En déduire un encadrement de la forme : $\quad 0 \leqslant \mathrm{Li}_2(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant A(x)\,x^{n+1} \quad$ pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, où $A(x)$ est indépendant de n, mais peut dépendre de x.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad$ mais aussi que $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrer finalement que $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$.

4) **a)** Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln x\,\ln(1-x)$.

b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2}$.