DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **5)** suivantes sont indépendantes.

1) Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j+1}$ et le produit $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{4^i}{j+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2) a) Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x}\geqslant 1+\dfrac{x}{3}$ d'inconnue $x\in[-1,+\infty[$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\geqslant 1+\dfrac{1}{3(n+1)}$.

c) En déduire un réel $\lambda>0$ pour lequel pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\geqslant\dfrac{\lambda}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

d) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3) Déterminer une expression explicite de la famille $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie par $a_{i,0}=i$ et $a_{i,j+1}=\dfrac{2}{j+1}\,a_{i+1,j}$ pour tous $i,j\in\mathbb{N}$. On commencera par obtenir le résultat par un calcul « et cetera » à base de points de suspension (à rédiger sur la copie), puis on le prouvera proprement par récurrence.

4) Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ peut être écrite d'une et une seule manière sous la forme :

$$x\longmapsto ax^2+bx+g(x)$$

où a et b sont des réels et où $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction pour laquelle $g(1)=g(-1)=0$.

5) Soit $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ une fonction strictement croissante pour laquelle $f(2)=2$ et $f(mn)=f(m)f(n)$ pour tous $m,n\in\mathbb{N}$. Montrer que $f(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pourra commencer par calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$ pour se familiariser avec f.

---

2 Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On commence par quelques rappels sur les racines $n^{\text{èmes}}$. Pour tout $x\geqslant 0$, il existe un et un seul réel $r\geqslant 0$ pour lequel $r^n=x$, appelé la *racine $n^{\text{ème}}$ de x* et noté $\sqrt[n]{x}$. La fonction $x\longmapsto\sqrt[n]{x}$ est alors croissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour tous $x,y\geqslant 0$:

$$\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x\qquad\text{et}\qquad\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}.$$

Deux notions distinctes de moyenne sont comparées dans ce problème. Pour toute famille $X=(x_1,\ldots,x_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, on pose :

$$a(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\quad(\textit{moyenne arithmétique de } x_1,\ldots,x_n)\qquad\text{et}\qquad g(X)=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}\quad(\textit{moyenne géométrique de } x_1,\ldots,x_n).$$

1) a) Montrer que pour tout $x>0$: $\quad\ln x\leqslant x-1$.

b) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{a(X)}-1\right)$ pour toute famille $X=(x_1,\ldots,x_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et en déduire que :

$$g(X)\leqslant a(X)\qquad(\textit{inégalité arithmético-géométrique}).$$

c) Déduire du résultat de la question **a)** que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>-n$: $\quad\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^x$.

d) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puis déduire du résultat de la question **a)** que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

Les questions **2)**, **3)** et **4)** qui suivent sont tout à fait indépendantes, mais la question **5)** mérite d'être traitée à la suite de la question **4)**.

2) On redémontre ici l'inégalité arithmético-géométrique sans faire appel à la fonction logarithme.

a) Soient $x_1,\ldots,x_{n+1}>0$ des réels pour lesquels $x_1\ldots x_{n+1}=1$. Montrer l'existence de deux entiers $i,j\in[\![1,n+1]\!]$, distincts, pour lesquels $x_i\leqslant 1\leqslant x_j$, puis montrer que $x_i+x_j-x_ix_j\geqslant 1$.

b) Montrer par récurrence sur n la proposition suivante : $\quad\forall x_1,\ldots,x_n>0,\quad\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}x_k=1\implies\sum_{k=1}^{n}x_k\geqslant n\right)$.

c) En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

3) Soit $X=(x_1,\dots,x_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ avec $n\geqslant 2$. On pose $M(X)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ et $v(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(x_k-a(X)\right)^2$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i+x_j)=2n^2\,a(X)$ et exprimer de même $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j$ en fonction de $g(X)$.

b) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $\sqrt{x_ix_j}$, (i,j) décrivant $[\![1,n]\!]^2$, montrer que :
$$a(X)-g(X)\geqslant\frac{1}{2n^2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}\right)^2.$$

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)^2=2n^2\,v(X)$, puis que : $\quad a(X)-g(X)\geqslant\dfrac{v(X)}{4M(X)}$.

La fin du problème est consacrée à une application de l'inégalité arithmético-géométrique.

4) Soient $x_1,\dots,x_n>0$. On pose $a_k=k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

a) Montrer que $a_1\dots a_k=(k+1)^k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

b) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $a_1x_1,\dots,a_kx_k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, montrer que :
$$\sum_{k=1}^n\sqrt[k]{x_1\dots x_k}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^k a_ix_i.$$

c) En déduire que : $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^n\sqrt[k]{x_1\dots x_k}\leqslant\sum_{i=1}^n a_ix_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)$, $\quad$ puis que :
$$\sum_{k=1}^n\sqrt[k]{x_1\dots x_k}\leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^n x_k \qquad (\textit{inégalité de Carleman}).$$

5) Soit $C>0$. On fait l'hypothèse que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n>0$: $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^n\sqrt[k]{x_1\dots x_k}\leqslant C\sum_{k=1}^n x_k\quad\bigstar$.
On pose $b_1=b_2=1$ et $b_k=\dfrac{1}{k-1}\left(1-\dfrac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ pour tout $k\geqslant 3$. Montrer que $C\geqslant\mathrm{e}$ en appliquant l'hypothèse $\bigstar$ aux réels $b_1,\dots,b_{n+1}$ pour tout $n\geqslant 2$ et en exploitant la limite de la question **1)d)**. Que signifie l'inégalité $C\geqslant\mathrm{e}$?

---

3 **(Cet exercice n'est pas prioritaire et sera moins rémunéré que les précédents.)**

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une relation binaire sur E est par définition une partie de $E\times E$. Dans cet exercice, les lettres $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ désigneront toujours des relations binaires sur E.

On définit une nouvelle relation binaire $\mathscr{R}\mathscr{S}$ sur E de la façon suivante — pour tous $x,y\in E$, on dit que $x\,\mathscr{R}\mathscr{S}\,y$ si :
$$\exists\, e\in E,\quad\left(x\,\mathscr{R}\,e\quad\text{et}\quad e\,\mathscr{S}\,y\right).$$

1) Dans cette question, $E=[\![1,3]\!]$, $\mathscr{R}=\left\{(1,2),(1,3),(2,3)\right\}$ et $\mathscr{S}=\left\{(1,1),(2,1)\right\}$. Expliciter $\mathscr{R}\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}\mathscr{R}$.

2) On suppose dans cette question que $\mathscr{R}\mathscr{S}=\mathscr{S}\mathscr{R}$.

a) Montrer que si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont symétriques, $\mathscr{R}\mathscr{S}$ l'est aussi.

b) Montrer que si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont transitives, $\mathscr{R}\mathscr{S}$ l'est aussi.

3) Dans cette question, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont deux relations d'équivalence. Montrer que $\mathscr{R}\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathscr{R}\mathscr{S}=\mathscr{S}\mathscr{R}$.

---

4 **(Difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous avez fait tout le reste !

Déterminer une expression explicite simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pourra utiliser la formule de Pascal.
