# DEVOIR SURVEILLÉ

**1** Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

**1)** Résoudre l'équation $z^3 = \mathrm{i}\overline{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

**2)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k x} = \frac{\cos^{n+1} x - \cos\big((n+1)x\big)}{\cos^n x \sin x}$. Récurrence interdite !

**3)** Montrer que l'ensemble $\Big\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-3\mathrm{i}| = 2\,|z+\mathrm{i}|\Big\}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**4)** Représenter graphiquement les ensembles $A = \Big\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| \in [1,4] \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\Big\}$ et $B = \Big\{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{e}^{2z} \in A\Big\}$.

---

**2** On note $f$ la fonction $x \longmapsto (x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1) a)** Étudier le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ et déterminer les points fixes de $f$. On notera $\alpha$ et $\beta$ ces points fixes avec $\alpha < \beta$. Préciser leur position par rapport à 0 et 1.

**b)** Montrer que $[0, \beta[$ est stable par $f$.

On admet pour gagner du temps que les intervalles $]0,1[$ et $]\beta, +\infty[$ sont eux aussi stables par $f$ et que les points fixes de $f \circ f$ sont exactement 0, 1, $\alpha$ et $\beta$.

**2)** Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle dans les cas suivants : **a)** $u_0 \in \big\{0, 1, \alpha, \beta\big\}$. **b)** $u_0 > \beta$.

**3)** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\ell > 1$. Montrer que si $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**4)** On suppose dans cette question que $u_0 \in ]0,1[ \setminus \big\{\alpha\big\}$.

**a)** Factoriser $f(x) - \alpha$ par $x - \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|u_{n+1} - \alpha| \geqslant (1-\alpha)\,|u_n - \alpha|$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend pas la valeur $\alpha$.

**b)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\alpha$. On pourra raisonner par l'absurde et étudier la suite $\left(\dfrac{|u_{n+1}-\alpha|}{|u_n - \alpha|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**c)** Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, mais que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

**5)** Dans cette question, $u_0$ est positif quelconque.

**a)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$ si et seulement si $u_p = \alpha$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

On note $g$ la fonction $x \longmapsto 1 + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_0 = \alpha$ et $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** Justifier la bonne définition de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle est strictement croissante de limite $\beta$.

**c)** Montrer que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ : $u_i = \alpha_{j+1} \implies u_{i+1} = \alpha_j$ et que la réciproque est vraie si $u_i \geqslant 1$.

**d)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$ si et seulement si $u_0 = \alpha_q$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$. Pour le sens direct, on pourra s'intéresser au plus petit élément de l'ensemble $\Big\{n \in \mathbb{N} \mid \ u_n < 1\Big\}$.

**6)** On suppose finalement que $u_0$ n'est aucun des réels $\alpha_q$, $q$ décrivant $\mathbb{N}$.

**a)** Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle dans le cas où $u_0 \in ]1,2[$.

**b)** On suppose dans cette question que $u_0 \in [2, \beta[$. Montrer que $u_r \in [0,2[$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$, puis en déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

**7)** En résumé, pour quelles valeurs de $u_0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite ?

---

3 On pose $D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \quad |z| \leqslant 1\right\}$.

**1)** Soient $a, b \in D$. Simplifier $|a-b|^2 + |a+b|^2$ et en déduire que l'un des réels $|a-b|$ ou $|a+b|$ est inférieur à $\sqrt{2}$.

**2)** Soient $r, s \in [0,1]$ et $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $|\varphi - \psi| \leqslant \dfrac{\pi}{3}$. Montrer que $\left|r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right|^2 \leqslant r^2 - rs + s^2$, puis que $\left|r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right| \leqslant 1$. Interpréter géométriquement le résultat.

**3) a)** Soient $u, v \in D$. Déduire du résultat de la question **2)** que l'un des réels $|u-1|$, $|u+1|$, $|v-1|$, $|v+1|$, $|u-v|$ et $|u+v|$ est inférieur à 1.

**b)** En déduire que pour tous $a, b, c \in D$, l'un des réels $|a-b|$, $|a+b|$, $|b-c|$, $|b+c|$, $|c-a|$ ou $|c+a|$ est inférieur à 1.

On s'intéresse à présent pour tout $n \geqslant 2$ à la proposition suivante notée $\mathscr{P}_n$ :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in D^n, \quad \exists (\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \left\{\pm 1\right\}^{n-1}, \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left|z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \ldots + \varepsilon_k z_k\right| \leqslant \sqrt{3}.$$

**4)** Que signifie géométriquement la proposition $\mathscr{P}_n$ pour tout $n \geqslant 2$ ?

**5) Initialisation :** Montrer que la proposition $\mathscr{P}_2$ est vraie.

**6) Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$. On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie et on souhaite montrer que la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est. Soient $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in D^{n+1}$.

**a)** On suppose dans cette question $z_1 + \varepsilon_2 z_2 \in D$ pour un certain $\varepsilon_2 \in \left\{\pm 1\right\}$. Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à la famille $(z_1 + \varepsilon_2 z_2, z_3, \ldots, z_{n+1})$.

On suppose dans la suite de cette question que $D$ ne contient ni $z_1 - z_2$ ni $z_1 + z_2$.

**b)** Montrer, en encadrant $\mathrm{Re}\left(\overline{z_1} z_2\right)$, que $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{3}$.

**c)** Montrer que $z_1 + \varepsilon z_3 \in D$ ou $z_2 + \varepsilon z_3 \in D$ pour un certain $\varepsilon \in \left\{\pm 1\right\}$.

**d)** Conclure dans le cas où $z_2 + \varepsilon z_3 \in D$, puis dans le cas où $z_1 + \varepsilon z_3 \in D$.

La proposition $\mathscr{P}_n$ est démontrée pour tout $n \geqslant 2$.