SEMAINE 10 DU 2 AU 8 DÉCEMBRE

TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL

Les fonctions manipulées sont éventuellement à valeurs complexes.

— Primitives, « unicité » à constante additive près.

— Primitivation des fonctions de la forme $f' \times g' \circ f$, des fonctions $x \longmapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \longmapsto e^{ax} \sin(bx)$ via l'exponentielle complexe, des produits de cosinus/sinus par linéarisation et des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $b^4 - 4ac < 0$.

— Intégrale d'une fonction complexe continue sur un segment. Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire et, pour les fonctions réelles, positivité, positivité stricte, croissance. Cas des fonctions paires/impaires/périodiques.

— Théorème fondamental du calcul intégral : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \big[F\big]_a^b$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

— Intégration par parties et changement de variable.

— Approximation de sommes par des intégrales. Informellement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \approx \int_1^n f(t)\,dt$.

— Introduction à la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

  ⟶ Division euclidienne des polynômes. Multiplicité d'une racine.

  ⟶ Théorème de d'Alembert-Gauss, factorisations irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

  ⟶ Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle. Partie entière. Quatre techniques de calcul des coefficients : multiplication par $(X-\lambda)^m$ puis évaluation en λ, multiplication par X puis passage à la limite en $+\infty$, évaluation en un point, identification bête et méchante.

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

— Matrice, coefficients, lignes, colonnes. Addition matricielle et multiplication par un scalaire. Matrices élémentaires.

— Produit matriciel. Associativité, bilinéarité, matrice identité. Matrice nilpotente. Formule du binôme, formule $A^k - B^k$. Produit par blocs.

— Transposée. Linéarité, involutivité, effet sur un produit. Matrice symétrique/antisymétrique.

— Matrices diagonales et triangulaires. Stabilité par combinaison linéaire et produit.

— Trace d'une matrice carrée. Linéarité, effet sur un produit.

— Représentation matricielle d'un système linéaire. Système linéaire compatible, principe « solution particulière de l'équation complète + solution générale de l'équation homogène ». Notation Vect dans $\mathbb{K}^n$. Interprétation géométrique d'un Vect, équations cartésiennes d'une droite dans un plan, d'un plan dans l'espace.

— Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire. Algorithme du pivot.

— Matrice inversible, groupe linéaire, système de Cramer. Si l'une des lignes/colonnes est combinaison linéaires des autres, la matrice n'est pas inversible (seulement cette implication). Une matrice carrée A est inversible si et seulement si le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue X possède une et une seule solution pour tout second membre Y. Application de l'algorithme du pivot à l'inversion des matrices.

— Caractérisation des matrices inversibles de taille 2 par le déterminant. Formules de Cramer 2×2.

— Opérations sur les matrices inversibles : inverse, produit, transposée. Toute opération élémentaire peut être vue comme un produit matriciel. Notations $A \underset{\mathrm{L}}{\sim} B$, $A \underset{\mathrm{C}}{\sim} B$ et $A \sim B$. Inversion des matrices par application directe d'opérations élémentaires.

— Inversibilité et inversion d'une matrice triangulaire. Tout système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls possède une et une seule solution.

Questions de cours de début d'heure

- **(TD)** Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale.
- Formule $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. $\quad + \quad$ Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des lignes de A est combinaison linéaire de ses autres lignes, alors A n'est pas inversible.
- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution.
- **(TD)** Le produit et la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent sont des matrices nilpotentes.