Semaine 14 du 26 janvier au 1er février

Espaces vectoriels

- Espace vectoriel de dimension finie. Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute partie libre possède au plus n éléments. Algorithme de la base incomplète. Théorème de la base incomplète/extraite. Dimension d'un espace vectoriel. En dimension n, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n. En dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. Une matrice est inversible si et seulement elle est inversible à gauche ou à droite, si et seulement si le système linéaire homogène qui lui est associé admet le vecteur nul pour seule et unique solution. Rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation de la liberté. Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité. Dimension d'un sous-espace affine. Dimension d'un espace vectoriel produit.
- Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie. Interprétation vectorielle de l'inversibilité.
- Somme de sous-espaces vectoriels. Parties génératrices. Somme directe. Caractérisation de la somme directe par l'intersection dans le cas de deux sous-espaces vectoriels. Lien entre somme directe et liberté. Bases adaptées à une somme directe. Dimension d'une somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Existence de supplémentaires en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

Topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

- Boules ouvertes/fermées. Voisinages d'un point. Toute intersection finie de voisinages est un voisinage. Deux points distincts peuvent toujours êtres séparés par des voisinages disjoints.
- Suite convergente, unicité de la limite. Caractérisation par les parties réelle et imaginaire. Suite bornée. Toute suite bornée est convergente.
- Suite extraite. Valeur d'adhérence. Les suites extraites d'une suite convergente convergent vers la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Toute suite bornée qui possède au plus une valeur d'adhérence converge.
- Point intérieur, point adhérent. Caractérisation séquentielle des points adhérents. Intérieur, adhérence, frontière. Exemple des intervalles de $\mathbb{R}$.
- Partie dense dans une autre. Caractérisation séquentielle de la densité. Densité dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et de l'ensemble des décimaux. Développement décimal illimité d'un réel.
- Ouvert. Exemple : boules ouvertes, complémentaires de boules fermées, intervalles, « produits » d'ouverts. Toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.
- Fermé, définition par les suites convergentes. Une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert. Exemples : boules fermées, complémentaires de boules ouvertes, intervalles, « produits » de fermés.

Questions de cours de début d'heure

- Formule de Grassmann (en admettant que la dimension d'un supplémentaire de F dans E vaut $\dim E - \dim F$).
- x est la limite d'une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n \geqslant N, \quad u_n \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \qquad \text{(définition d'une valeur d'adhérence).}$$
- Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass complexe à partir du théorème de Bolzano-Weierstrass réel.
- Le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert.
- Toute réunion d'ouverts et toute intersection finie d'ouverts sont des ouverts.
- Toute suite convergente d'éléments de F a pour limite un élément de F si et seulement si $\mathbb{K} \setminus F$ est ouvert.