Semaine 20 du 16 au 22 mars

Analyse asymptotique de niveau 1

- Négligeabilité (fonctions et suites). Croissances comparées usuelles. Limites finies et petits o. Opérations sur les petits o.
- Développements limités. Unicité des coefficients. On peut toujours se ramener à 0 par translation. Troncature. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Cas des fonctions paires et impaires.
- Primitivation des développements limités. Formule de Taylor-Young. Dérivation des développements limités.
- Développements limités usuels au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, ainsi que $\tan x$ à l'ordre 3.
- Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, inversion, composition, translation.
- Équivalence (fonctions et suites). Lien entre les équivalents et les limites, les petits o et les développements limités. Nouveaux équivalents usuels en 0 : $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x - \dfrac{\pi}{2}$ et $\operatorname{th} x$. Opérations sur les équivalents.
- Domination (fonctions et suites). Lien entre les grands O, les petits o et l'équivalence. Opérations sur les grands O.
- Constante d'Euler.
- Application des outils du chapitre au calcul de limites.
- Position locale par rapport à une tangente. Extrema locaux et points d'inflexion. Position locale par rapport à une asymptote.

Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles

- Polynôme irréductible sur un corps quelconque. Exemple des polynômes de degré 1, 2 ou 3. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}(X)$ et factorisation irréductible sur $\mathbb{C}$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}(X)$ et factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$.
- PGCD d'un ensemble fini de polynômes, existence et unicité. Algorithme d'Euclide. Relations de Bézout, algorithme d'Euclide étendu. PPCM d'un ensemble fini de polynômes, existence et unicité. Lien avec le PGCD. Le PGCD et le PPCM ne dépendent pas du corps de base.
- Lemme d'Euclide. Unicité de la factorisation irréductible.
- Polynômes premiers entre eux (dans leur ensemble ou deux à deux). Théorème de Bézout. Théorème de Gauss. Si des polynômes sont premiers avec P, leur produit l'est aussi. Si des polynômes sont premiers entre eux deux à deux et divisent P, leur produit divise P.
- Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$. Structure de $\mathbb{K}$-algèbre. Forme irréductible, dérivée, degré. Fonction rationnelle. Zéros et pôles, multiplicité. Partie entière.
- Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Application au calcul d'intégrales. Techniques usuelles : multiplication par $(X-\lambda)^m$ puis évaluation en λ, multiplication par X puis passage à la limite en $+\infty$, évaluation en un point, mise au même dénominateur puis identification. Formule $a = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$ lorsque λ est racine simple de B. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\dfrac{P'}{P}$.

Questions de cours de début d'heure

- Tout polynôme de degré 2 ou 3 de $\mathbb{K}[X]$ sans racine dans $\mathbb{K}$ est irréductible sur $\mathbb{K}$.
- Si λ est racine simple de B et si la partie polaire de λ dans $\dfrac{A}{B}$ s'écrit $\dfrac{a}{X-\lambda}$, alors $a = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.
- Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\dfrac{P'}{P}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul.
- **(TD)** Le polynôme $X^3 - X + p$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $p \in \mathbb{P}$ — il est de degré 3 et ses racines rationnelles sont forcément entières, mais il n'en a pas.
- **(TD)** Théorème de Gauss-Lucas.