

# SEMAINE 20 DU 23 AU 29 MARS

## APPLICATIONS LINÉAIRES

- Application linéaire. Morphisme d'algèbres. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formes coordonnées relativement à une base. Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes.
- Opérations sur les applications linéaires : composition, réciproque, combinaison linéaire. Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée. Algèbre  $\mathcal{L}(E)$ , groupe  $GL(E)$ . Endomorphisme nilpotent.
- Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'un Vect par une application linéaire, expression de l'image comme un Vect. Image d'une matrice.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire, caractérisation de l'injectivité. Structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. Noyau d'une matrice.
- Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base ou par ses restrictions à une somme directe. Cas d'une application injective/surjective.
- Effet d'un isomorphisme sur la dimension. Tout espace vectoriel de dimension finie  $n \neq 0$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ . Dimension et base de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Application linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. Injectif = surjectif pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.
- Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Lien avec le rang d'une famille de vecteurs. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot. Rang d'une matrice extraite.
- Compléments classiques :
  - Si  $f$  et  $g$  commutent, alors  $\text{Im } g$  et  $\text{Ker } g$  sont stables par  $f$ .
  - Noyaux itérés et images itérées d'un endomorphisme en dimension finie, monotonie stricte puis constance. Indice et décomposition de Fitting.
  - Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent et  $E \neq \{0_E\}$ , alors  $\text{Im } f \neq E$  et  $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$ . Si de plus  $\dim E = n$ , alors  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

## QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
- Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $f$  est injective si et seulement si  $(f(e_i))_{i \in I}$  est libre.
- Forme géométrique du théorème du rang ET théorème du rang.
- Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{X}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Alors  $\text{rg}(\mathcal{X}) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}))$ .
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  :  $\text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A)$ .
- Si  $E \neq \{0_E\}$ , alors pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent,  $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$  et  $\text{Im } f \neq E$ . + (TD) Pour tous  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  :  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \iff F = \text{Im } f + \text{Ker } g$ .
- (TD) Pour tous  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie :  $\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g$ .