

SEMAINE 21 DU 30 MARS AU 5 AVRIL

APPLICATIONS LINÉAIRES

- Application linéaire. Morphisme d'algèbres. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formes coordonnées relativement à une base. Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes.
- Opérations sur les applications linéaires : composition, réciproque, combinaison linéaire. Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée. Algèbre $\mathcal{L}(E)$, groupe $GL(E)$. Endomorphisme nilpotent.
- Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'un Vect par une application linéaire, expression de l'image comme un Vect. Image d'une matrice.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire, caractérisation de l'injectivité. Structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. Noyau d'une matrice.
- Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base ou par ses restrictions à une somme directe. Cas d'une application injective/surjective.
- Effet d'un isomorphisme sur la dimension. Tout espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à \mathbb{K}^n . Dimension et base de $\mathcal{L}(E, F)$. Application linéaire de rang fini, rang. Inégalités sur le rang et cas d'égalité. Injectif = surjectif pour des espaces vectoriels de départ et d'arrivée de mêmes dimensions finies. Forme géométrique du théorème du rang. Théorème du rang.
- Rang d'une matrice, caractérisation de l'inversibilité. Lien avec le rang d'une famille de vecteurs. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Les opérations élémentaires préservent le rang. Calcul du rang par l'algorithme du pivot. Rang d'une matrice extraite.
- Compléments classiques :
 - Si f et g commutent, alors $\text{Im } g$ et $\text{Ker } g$ sont stables par f .
 - Noyaux itérés et images itérées d'un endomorphisme en dimension finie, monotonie stricte puis constance. Indice et décomposition de Fitting.
 - Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent et $E \neq \{0_E\}$, alors $\text{Im } f \neq E$ et $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$. Si de plus $\dim E = n$, alors $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Projection, symétrie. Propriétés, caractérisation.
- Lemme de décomposition des noyaux.
- Dual d'un espace vectoriel. Base duale en dimension finie. Hyperplan, définition par les formes linéaires, caractérisation géométrique par l'existence d'une droite supplémentaire. Comparaison des équations d'un hyperplan. En dimension n , toute intersection de p hyperplans est dimension au moins $n - p$ et tout sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Lemme de décomposition des noyaux pour deux polynômes.
- Caractérisation géométrique des hyperplans.
- En dimension n , toute intersection de p hyperplans est dimension au moins $n - p$ et tout sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.
- **(TD)** Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un nombre complexe λ pour lequel $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
- **(TD)** Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p . Alors $p \leq n$ et $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ — via une famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ bien choisie.
- **(TD)** Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F . Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ pour laquelle $\text{Ker } f = K$ et $\text{Im } f = I$ si et seulement si $\dim K + \dim I = \dim E$.