

SEMAINE 22 DU 6 AU 12 AVRIL

SÉRIES ET FAMILLES SOMMABLES

- Série, sommes partielles. Convergence, divergence, somme, restes. Séries géométriques. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Divergence grossière. Opérations sur les séries.
- Comparaison série-intégrale. Séries de Riemann, fonctions ζ .
- Adaptation du théorème de la limite monotone aux séries à termes positifs. Comparaison par des inégalités. Comparaison par des équivalents.
- Lien suite-série. Retour sur la constante d'Euler. Formule de Stirling.
- Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence. Semi-convergence. Comparaison par des grands O. Règle de d'Alembert.
- Critère spécial des séries alternées. Séries de Riemann alternées.
- Addition, multiplication et inégalités dans $[0, +\infty]$, borne supérieure. Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Cas d'une somme finie, d'une somme de série. Théorème de sommation par paquets. Changement d'indice, restriction, linéarité, croissance, théorème de Fubini, familles produits.
- Famille sommable. Somme d'une famille sommable de nombres complexes. Adaptation des résultats du cas positif. Produit de Cauchy. Définition de l'exponentielle par la relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et formule $e^{a+b} = e^a e^b$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
- Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. Parties d'un ensemble au plus dénombrable. Produit d'ensembles au plus dénombrables. Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Preuve du développement asymptotique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ via le lien suite-série.
- La convergence absolue implique la convergence.
- Règle de d'Alembert.
- Critère spécial des séries alternées.
- **(TD)** Convergence de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $\alpha > 1$ d'une part et $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ d'autre part. Les cas de divergence ne font pas partie de la question de cours.
- **(TD)** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour un certain $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge (règle de Raabe-Duhamel).