SEMAINE 23 DU 13 AU 19 AVRIL

SÉRIES ET FAMILLES SOMMABLES

— Série, sommes partielles. Convergence, divergence, somme, restes. Séries géométriques. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Divergence grossière. Opérations sur les séries.

— Comparaison série-intégrale. Séries de Riemann, fonctions ζ.

— Adaptation du théorème de la limite monotone aux séries à termes positifs. Comparaison par des inégalités. Comparaison par des équivalents.

— Lien suite-série. Retour sur la constante d'Euler. Formule de Stirling.

— Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence. Semi-convergence. Comparaison par des grands O. Règle de d'Alembert.

— Critère spécial des séries alternées. Séries de Riemann alternées.

— Addition, multiplication et inégalités dans $[0,+\infty]$, borne supérieure. Somme d'une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Cas d'une somme finie, d'une somme de série. Théorème de sommation par paquets. Changement d'indice, restriction, linéarité, croissance, théorème de Fubini, familles produits.

— Famille sommable. Somme d'une famille sommable de nombres complexes. Adaptation des résultats du cas positif. Produit de Cauchy. Définition de l'exponentielle par la relation $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et formule $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.

— Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. Parties d'un ensemble au plus dénombrable. Produit d'ensembles au plus dénombrables. Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable.

PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

— Vocabulaire usuel des événements et des variables aléatoires. Système complet d'événements.

— Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini. Probabilité uniforme. Distribution de probabilités. Caractérisation d'une probabilité par une distribution de probabilités. Propriétés des probabilités : complémentaire, croissance, réunion.

— Loi d'une variable aléatoire. Loi uniforme sur un ensemble fini non vide, loi de Rademacher. Loi de Bernoulli, exemple fondamental des indicatrices d'événements. Loi de $f(X)$.

— Probabilité conditionnelle. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire. Formule des probabilités composées.

— Événements indépendants. Indépendance et complémentaires. Loi binomiale. Variables aléatoires indépendantes. Préservation de l'indépendance par composition. Lemme des coalitions.

— Existence d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites.

— Formule des probabilités totales. Formules de Bayes.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— **(TD)** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum u_n v_n$ converge (*règle d'Abel*).

— **(TD)** Pour tout groupe G et toute partie finie X de G, le sous-groupe engendré $\langle X\rangle$ est au plus dénombrable.

— **(TD)** $\mathbb{R}^2$ n'est pas une réunion dénombrable de droites.

— **(TD)** Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[\![1,n]\!]$. Calcul de la loi de $M = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$ en passant par $P(M \geqslant k)$, puis application à l'inégalité $P\big(\exists\, i \in [\![1,n]\!],\quad X_i = 1\big) \geqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.