

# SEMAINE 24 DU 4 AU 10 MAI

## PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

- Vocabulaire usuel des événements et des variables aléatoires. Système complet d'événements.
- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini. Probabilité uniforme. Distribution de probabilités. Caractérisation d'une probabilité par une distribution de probabilités. Propriétés des probabilités : complémentaire, croissance, réunion.
- Loi d'une variable aléatoire. Loi uniforme sur un ensemble fini non vide, loi de Rademacher. Loi de Bernoulli, exemple fondamental des indicatrices d'événements. Loi de  $f(X)$ .
- Probabilité conditionnelle. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire. Formule des probabilités composées.
- Événements indépendants. Indépendance et complémentaires. Loi binomiale. Variables aléatoires indépendantes. Préservation de l'indépendance par composition. Lemme des coalitions.
- Existence d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites.
- Formule des probabilités totales. Formules de Bayes. Formule des probabilités composées. Lois conditionnelles d'une variable aléatoire.
- Loi (conjointe) d'une famille finie de variables aléatoires, lois marginales. Loi uniforme sur un produit cartésien :  $(X, Y) \sim \mathcal{U}(E \times F)$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et  $X \sim \mathcal{U}(E)$  et  $Y \sim \mathcal{U}(F)$ . Loi de  $f(X, Y)$ . Sommes de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales.
- Espérance d'une variable aléatoire complexe. Espérance de la loi uniforme, de la loi de Bernoulli, de la loi binomiale. Formule  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ . Linéarité, inégalité triangulaire, lien avec les parties réelle et imaginaire, positivité, croissance. Formule de transfert, cas d'un couple de variables aléatoires. Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.

---

## QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Loi uniforme sur un produit cartésien :  $(X, Y) \sim \mathcal{U}(E \times F)$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et  $X \sim \mathcal{U}(E)$  et  $Y \sim \mathcal{U}(F)$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et si  $X \sim \mathcal{B}(m, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $X+Y \sim \mathcal{B}(m+n, p)$  — avec preuve polynomiale ou combinatoire, au choix de l'étudiant(e), de la formule de type Vandermonde utilisée.
- **(TD)** Loi de  $X+Y$  lorsque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes de même loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
- **(TD)** Soient  $I$  un intervalle,  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction concave. Alors  $E(X) \in I$  et  $E(f(X)) \leq f(E(X))$  (inégalité de Jensen).
- Théorème de Heine.
- Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.