Semaine 25 du 18 au 24 mai

Intégration sur un segment

- Continuité uniforme, lien avec la continuité et la lipschitzianité. Théorème de Heine.
- Fonction en escalier, fonction continue par morceaux. Stabilité par combinaison linéaire, produit, module, parties réelle et imaginaire. Distance uniforme, inégalité triangulaire. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale d'une fonction en escalier, puis d'une fonction continue par morceaux. Linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, lien avec les parties réelle et imaginaire, modification d'un nombre fini de valeurs, et dans le cas de fonctions réelles, positivité, croissance, positivité stricte, nullité avec signe constant. Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique.
- Sommes de Riemann. Majoration de l'erreur dans le cas lipschitzien (donc dans le cas $\mathscr{C}^1$).
- Théorème fondamental du calcul intégral. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$: $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b f$. Intégration par parties. Changement de variable.
- Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Étude de limites d'intégrales par encadrement/minoration/majoration.

Analyse asymptotique de niveau 2

- Développements asymptotiques de suites d'intégrales et de fonctions définies par une intégrale.
- Utilisations d'inégalités tayloriennes pour calculer un développement asymptotique de somme ou d'intégrale.
- Développements asymptotiques de suites récurrentes. Pour aller plus loin, théorème de sommation des relations de comparaison (programme de deuxième année).
- Développements asymptotiques de solutions d'équations à paramètre et de suites implicites.

Questions de cours de début d'heure

- Théorème fondamental du calcul intégral : $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I pour tout intervalle I, toute fonction $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et tout $a \in I$.
- Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$ avec des fonctions toutes continues, alors $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. + **(TD)** Lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathscr{C}^1$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- **(TD)** Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive à partir d'un certain rang et que $\displaystyle\sum_{k=1}^n b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$.