Semaine 27 du 1er au 7 juin

Représentation matricielle des applications linéaires

— Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Formules :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big), \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(u(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Caractérisation des isomorphismes. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde.

— Interprétation géométrique des blocs en termes de stabilité. Exemple des projections et des symétries dans une base adaptée.

— Matrice de passage. Changement de base pour un vecteur. Changement de bases pour une application linéaire. Changement de bases et matrice J_r.

— Matrices équivalentes. Lien avec les opérations élémentaires et le changement de bases pour une application linéaire. Caractérisation par le rang. Invariance du rang par transposition.

— Matrices semblables. Lien avec le changement de base pour un endomorphisme. Invariance du rang et de la trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

— Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice carrée. Le spectre et la dimension des sous-espaces propres sont invariants par similitude. Toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. Sur $\mathbb{C}$, le spectre est non vide. Le spectre est fini et les sous-espaces propres sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

— Endomorphisme diagonalisable, matrice carrée diagonalisable. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable. Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si $E = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)$, si et seulement si u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Questions de cours de début d'heure

— Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde, interprétée comme matrice d'une certaine application linéaire.

— Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r, il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F pour lesquelles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$.

— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E_\lambda(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(u)(x) = P(\lambda)\,x$. Par conséquent, toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u.

— Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre (par récurrence).

— **(TD)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n. Montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{n-1} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.