SEMAINE 3 DU 30 SEPTEMBRE AU 6 OCTOBRE

RELATIONS BINAIRES ET APPLICATIONS

— Application/fonction, ensemble de définition, ensemble d'arrivée, image. Restriction, prolongements. Composition, identité, itérées. Partie stable. Indicatrice d'une partie, propriétés algébriques.

— Surjection. Composée de deux surjections. Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

— Injection. Composée de deux injections. Toute fonction strictement monotone est injective. Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.

— Réciproque, bijection. Bijectivité d'une réciproque, d'une composée.

— Image directe/réciproque d'une partie. Si f est bijective, l'image directe de B par f^{-1} est aussi l'image réciproque de B par f. Réunion/intersection d'images directes/réciproques. Si f est injective, alors $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Toute application $f : E \longrightarrow F$ partitionne son ensemble de départ E : $\quad E = \bigsqcup_{y\in f(E)} f^{-1}\big(\{y\}\big)$.

DÉNOMBREMENT

— Ensemble fini, cardinal. Lien avec l'équipotence. Parties d'un ensemble fini. Effet d'une application sur le cardinal. Principe des tiroirs. Sommes des valeurs d'une indicatrice : $\quad |A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$.

— Cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis, cardinal d'une différence de deux ensembles finis. Principe des bergers.

— Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis. Liste, nombre de p-listes d'un ensemble fini. Arrangement, nombre de p-arrangements d'un ensemble fini.

— Nombre d'applications (resp. applications injectives) entre deux ensembles finis. Nombre de permutations d'un ensemble fini.

— Rappels sur les coefficients binomiaux. Combinaison, nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini. Nombre de k-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$. Nombre de parties d'un ensemble fini. Formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}, \qquad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

— Formule du crible.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— **(TD)** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour toute partie A de E : $\quad A \subset f^{-1}\big(f(A)\big) \quad$ avec un dessin pour illustrer le fait que l'inclusion n'est pas une égalité en général. En outre, si f est injective, alors $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ pour toute partie A de E. La réciproque n'est pas demandée.

— **(TD)** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour toute partie B de F : $\quad f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \quad$ avec un dessin pour illustrer le fait que l'inclusion n'est pas une égalité en général. En outre, si f est surjective, alors $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ pour toute partie B de F. La réciproque n'est pas demandée.

— Calcul de $\sum_{A,B\in\mathscr{P}(E)} |A\cap B|$ pour tout ensemble fini non vide E.

— Preuve combinatoire de la formule de Vandermonde.

— **(TD)** Soit E un ensemble fini de cardinal n. Combien existe-t-il de couples (A,B) de parties de E pour lesquelles $A\cap B = \varnothing$? Deux preuves sont attendues (cf. correction en ligne).