SEMAINE 5 DU 3 AU 9 NOVEMBRE

SUITES RÉELLES

— Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$. Plus grand/petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$. Unicité. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

— Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Lien avec le plus grand/petit élément. Si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$. Borne supérieure/inférieure de $A \cup B$, $A+B$ et λA avec $\lambda > 0$. Propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\mathbb{R}$.

— Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Reprise des points précédents dans $\overline{\mathbb{R}}$, notamment avec la propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

— Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$. Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

— Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$. L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints.

— Vocabulaire usuel sur les suites : constance, stationnarité, caractère borné, signe, monotonie, propriété vraie à partir d'un certain rang. Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

— Définition générale de la limite d'une suite, cas d'une limite finie et des limites $+\infty$ et $-\infty$. Unicité. Convergence/divergence. Toute suite convergente est bornée.

— Opérations sur les limites : somme, produit, multiplication par un scalaire, inverse, composition à gauche par une fonction (momentanément admis).

— Fonction d'extraction, suite extraite, valeur d'adhérence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. Limite d'une suite extraite. Si $u_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Application la non-existence de limites.

— Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang. Passage à la limite dans une inégalité large.

— Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Comparaison exponentielle/factorielle.

— Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.

— Introduction aux petits o et aux équivalents. Les limites finies et les équivalents cachent des petits o :
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \iff u_n \underset{n \to +\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1) \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \to +\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n).$$
Exemple de la série harmonique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n.$

— Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Existence et unicité si u_0 appartient à une partie stable. Lien entre le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ et la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

— Théorème de Cesàro.

— Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

— Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$.

— Théorème d'encadrement.

— Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\eta \in]0,1[$. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \eta$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Application à la comparaison géométrique/factorielle.

— Théorème de la limite monotone pour une suite croissante, majorée ou non.

— Théorème de Cesàro dans le cas fini.

— Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans le cas réel.

— **(TD)** Pour toute suite décroissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de segments non vides, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un segment non vide (théorème des segments emboîtés).