Semaine 8 du 18 au 24 novembre

Nombres complexes

— Nombre complexe, forme algébrique. Interprétation géométrique. Conjugué, module, relation fondamentale $|z|^2 = z\overline{z}$, inverse. Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

— Racines carrées d'un nombre complexe, calcul algébrique. Résolution des équations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

— Brève extension des notions de limite, continuité, dérivabilité et classe $\mathscr{C}^k$ aux suites et fonctions complexes.

— Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1, exponentielle imaginaire. Formules d'Euler et de Moivre, transformation des sommes en produits.

— Arguments et formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique de $\dfrac{z-b}{z-a}$.

— Exponentielle complexe, transformation des sommes en produits et périodicité.

— Transformation des expressions $a\cos x + b\sin x$. Linéarisation et délinéarisation d'expressions trigonométriques. Technique de l'angle moitié, formules $\cos x + \cos y\ldots$ et simplification de sommes du genre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

— Interprétation géométrique de l'addition (translation) et de la multiplication (homothétie, rotation) de deux nombres complexes. Similitudes directes définies par centre, rapport et mesure d'angle.

— Racines $n^{\text{èmes}}$. Ensemble $\mathbb{U}_n$. Nombre j : $\quad \mathrm{j}^3 = 1, \quad \overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2 \quad$ et $\quad 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

— Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, cas complexe et réel.

Questions de cours de début d'heure

— Factorisation de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

— Racines $n^{\text{èmes}}$, d'abord de l'unité, puis en général.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale C_n pour laquelle $\cos(n\theta) = C_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (preuve par délinéarisation via la formule de Moivre).

— **(TD)** Délinéarisation de $\cos(5x)$, puis calcul de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ via $\cos^2\dfrac{\pi}{10}$.